

الرياضيات
للصف الأول الثانوي
الفصل الدراسى الأول



الفصل الثالث

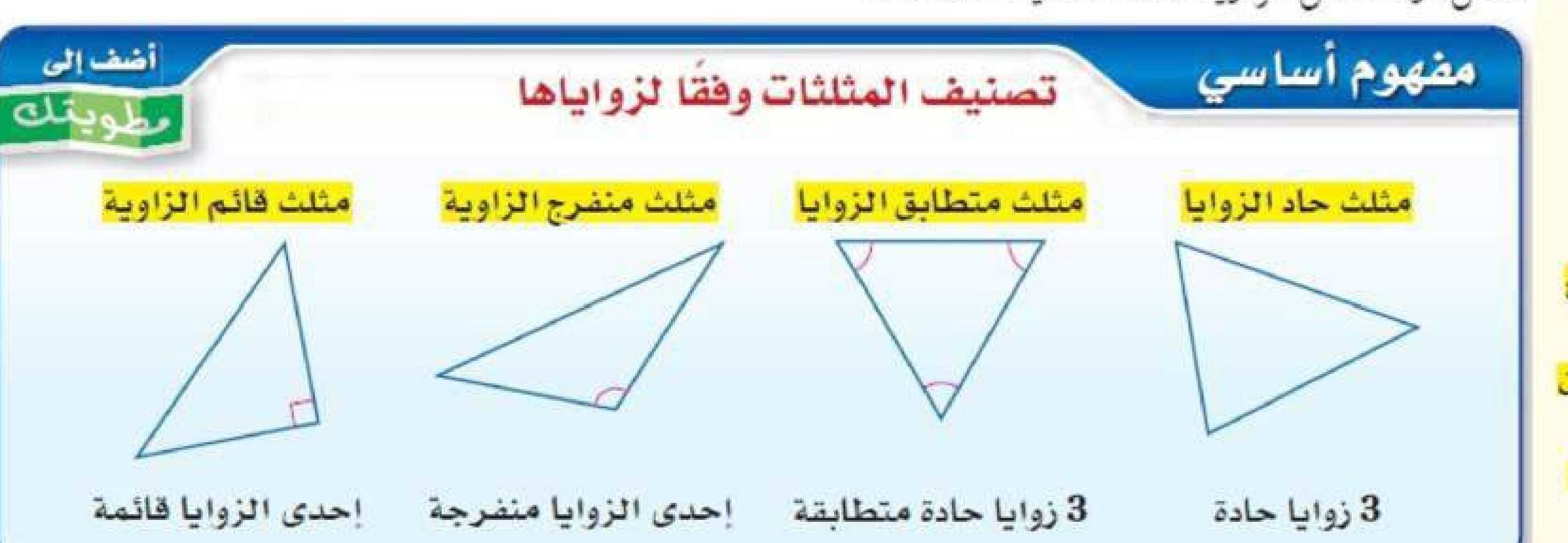
تطابق المثلثات

۳-۱ تصنيف المثلثات
Classifying Triangles

تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها: يكتب المثلث ABC على الصورة $\triangle ABC$ ، وتُسمى عناصره باستعمال الأحرف A , B , C كما يلي:

- أضلاع $\triangle ABC$ هي: $\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA}$
- الرؤوس هي: A , B , C
- الزوايا هي: $\angle A$ أو $\angle BAC$, $\angle C$ أو $\angle BCA$, $\angle B$ أو $\angle ABC$

وتُصنّف المثلثات بطريقتين: وفقًا لزواياها أو أضلاعها. وتحتوي جميع المثلثات على زاويتين حادتين على الأقل، وتُستعمل الزاوية الثالثة لتصنيف المثلث.



فيما سبق:

درست قياس الزوايا وتصنيفها.

والآن:

- أصنف المثلثات وفقًا لزواياها.
- أصنف المثلثات وفقًا لأضلاعها.

المفردات:

المثلث الحاد الزوايا
acute triangle

المثلث المتطابق الزوايا
equiangular triangle

المثلث المنفرج الزاوية
obtuse triangle

المثلث القائم الزاوية
right triangle

المثلث المتطابق الأضلاع
equilateral triangle

المثلث المتطابق الضلعين
isosceles triangle

المثلث المختلف الأضلاع
scalene triangle



٣-١ تصنيف المثلثات
Classifying Triangles

مثال 1 تصنيف المثلثات وفقًا لزواياها

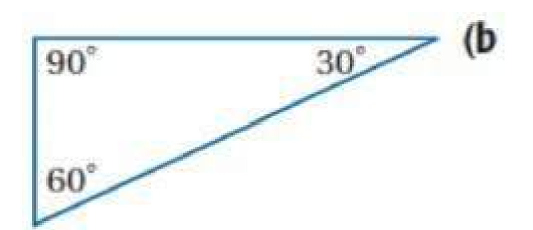
صنّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(a

70° ، 40° ، 70°

زوايا المثلث الثلاث حادّة وليست جميعها متساوية. فهذا المثلث حادّ الزوايا.

(b



قياس إحدى زوايا هذا المثلث 90°، وبما أن إحدى زواياه قائمة، فإنه مثلث قائم الزاوية.

مثال 2 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لزواياها

صنّف $\triangle PQR$ إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

Q، P، S، R، 45°، 59°، 45°، 31°

تقع النقطة S داخل $\angle PQR$، وحسب مسلّمة جمع الزوايا يكون:

$$m\angle PQR = m\angle PQS + m\angle SQR$$

بالتعويض، $m\angle PQR = 45^\circ + 59^\circ = 104^\circ$

وبما أن إحدى زوايا $\triangle PQR$ منفرجة، فإنه منفرج الزاوية.

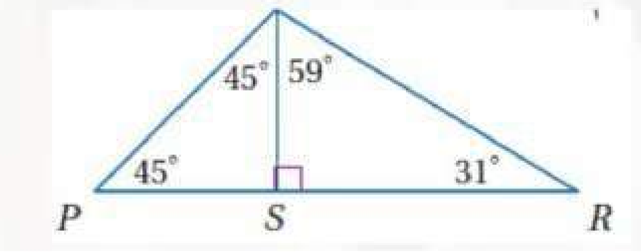




تحقق من فهمك

صنِّف كلًّا من المثلثين الآتيين إلى حادّ الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



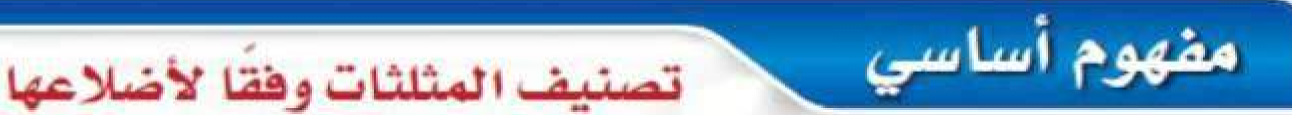


2) استعمل الشكل أعلاه لتصنيف $\triangle PQS$ إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

قائم الزاوية؛ الزاوية PSQ قائمة.



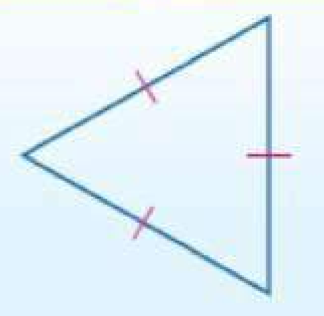
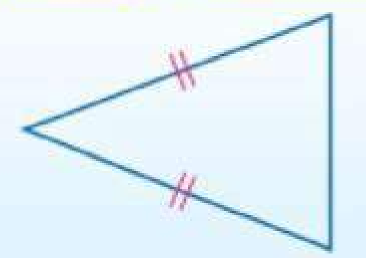
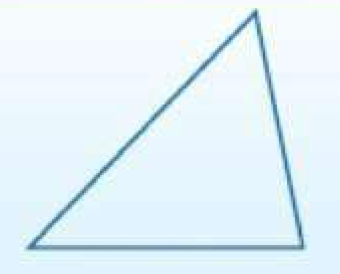
٣-١ تصنيف المثلثات
Classifying Triangles



مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها

مثلث متطابق الأضلاع	مثلث متطابق الضلعين	مثلث مختلف الأضلاع
		
3 أضلاع متطابقة	ضلعان على الأقل متطابقان	لا توجد أضلاع متطابقة

مثال 3 من واقع الحياة

تصنيف المثلثات وفقًا لأضلاعها



فن العمارة: صنِّف المثلث في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

في المثلث ضلعان قياس كل منهما 55 cm ، أيْ أنّ في المثلث ضلعين متطابقين.

فيكون المثلث متطابق الضلعين.

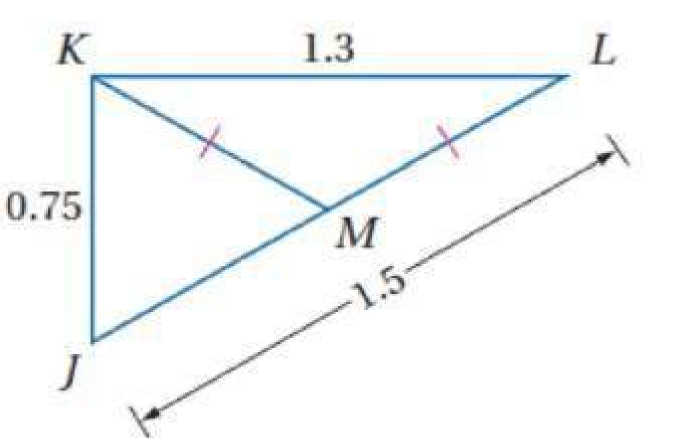
تحقق من فهمك



3) **قيادة السيارة والسلامة:** صنِّف شكل زر ضوء الخطر في الهامش على يمين الصفحة وفقًا لأضلاعه.



مثال 4 تصنيف المثلثات ضمن أشكال مختلفة وفقًا لأضلاعها



إذا كانت M نقطة منتصف JL، فصنِّف $\triangle JKM$ إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.

من تعريف نقطة المنتصف $JM = ML$.

$JM + ML = JL$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$ML + ML = 1.5$	بالتعويض
$2ML = 1.5$	بالتبسيط
$ML = 0.75$	بقسمة الطرفين على 2

$JM = ML = 0.75$

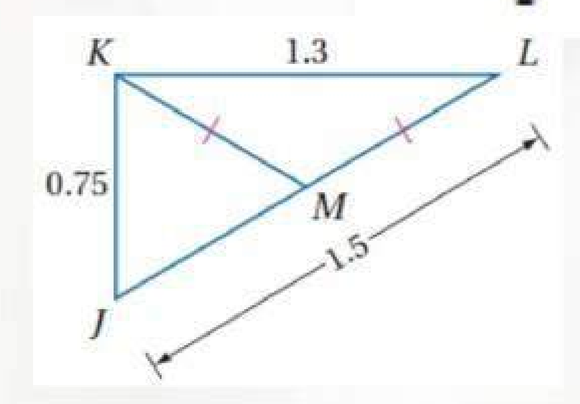
وبما أن $\overline{ML} \cong \overline{KM}$، فإنّ $KM = ML = 0.75$.

وهكذا تكون قياسات أضلاع المثلث الثلاثة متساوية، أي أن الأضلاع الثلاثة متطابقة؛ لذا فإن المثلث متطابق الأضلاع.



تحقق من فهمك

4) صنِّف ΔKML إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع. ووضِّح إجابتك.



متطابق الضلعين؛ $KM = ML$



مثال 5 إيجاد قيم مجهولة

جبر: أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الضلعين ABC في الشكل المجاور.

A, B, C, $9x-1$, $4x+1$, $5x-0.5$

الخطوة 1: أوجد قيمة x.

$AC = CB$	مُعطى
$4x + 1 = 5x - 0.5$	بالتعويض
$1 = x - 0.5$	بطرح $4x$ من الطرفين
$1.5 = x$	بإضافة 0.5 إلى الطرفين

الخطوة 2: عوّض لإيجاد طول كل ضلع من أضلاع المثلث:

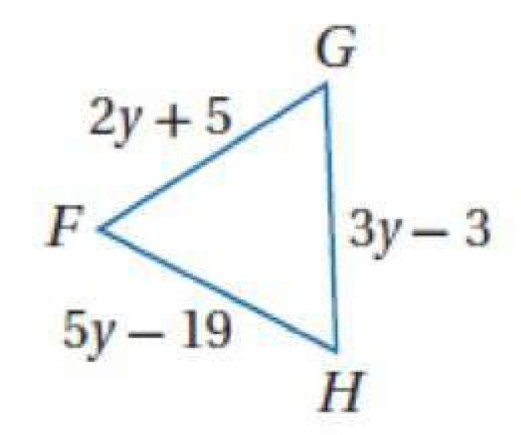
$AC = 4x + 1$	مُعطى
$= 4(1.5) + 1 = 7$	بالتعويض $x = 1.5$
$CB = AC$	مُعطى
$= 7$	بالتعويض $AC = 7$
$AB = 9x - 1$	مُعطى
$= 9(1.5) - 1$	بالتعويض $x = 1.5$
$= 12.5$	بالتبسيط

إرشادات للدراسة

تحقّق للتحقق من الإجابة في المثال 5، اختبر ما إذا كانت $CB = AC$ عندما نعوّض بـ 1.5 مكان x في العبارة $5x - 0.5$ التي تمثل CB.

$$CB = 5x - 0.5$$
$$= 5(1.5) - 0.5$$
$$= 7 ✓$$

تحقق من فهمك



5) أوجد قياسات أضلاع المثلث المتطابق الأضلاع FGH.

$$5y - 19 = 2y + 5$$

$$5y - 2y = 19 + 5$$

$$3y = 24$$

$$y = 8$$

$$FG = 2*8 + 5$$

$$FG = 21$$

$$FG = GH = HF = 21$$

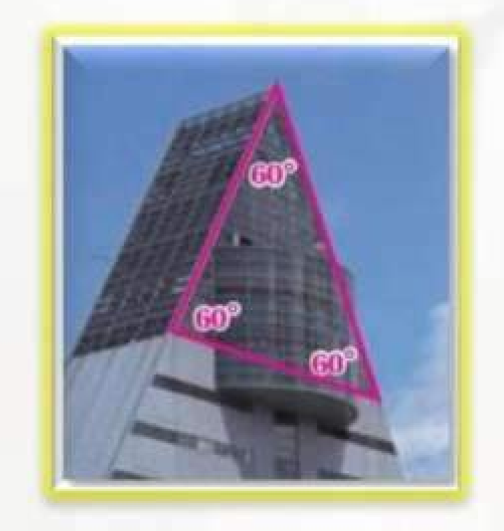


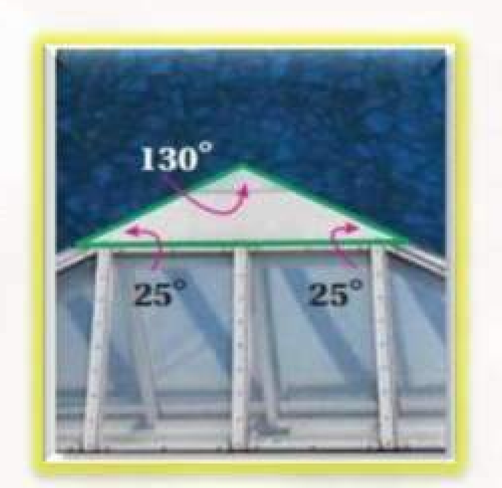
Classifying Triangles













الحل

١) قائم الزاوية لأنه يحتوي على زاوية قياسها ٩٠

٢) منفرج الزاوية لأن إحدى زواياه أكبر من ٩٠

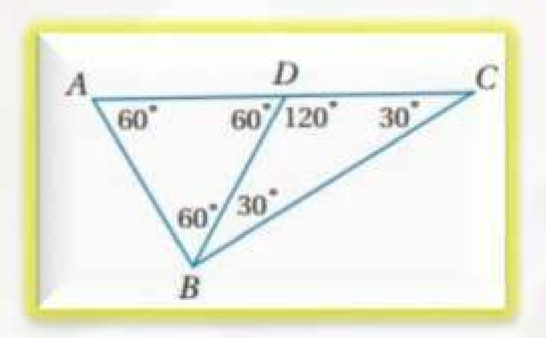
٣) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية







صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



4) $\triangle ABD$

5) $\triangle BDC$

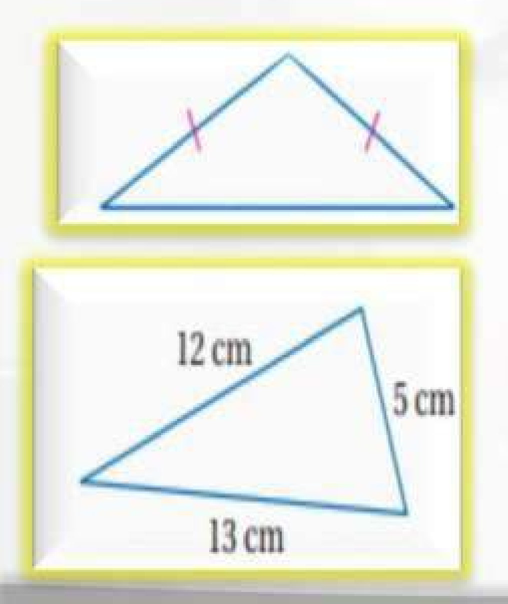
6) $\triangle ABC$



٤) ΔABD متطابق الزوايا، قياس كل زاوية = 60

٥) ΔBDC منفرج الزاوية

٦) ΔABC قائم الزاوية، لأن $m\angle ABC = 90$

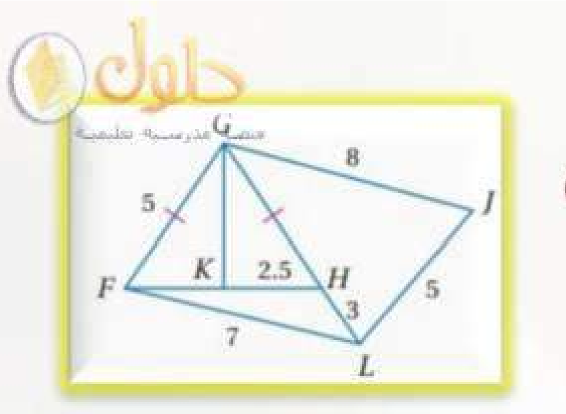




صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

٧) متطابق الضلعين

٨) مختلف الأضلاع





إذا كانت النقطة K هي منتصف FH، فصنف كلا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:

9) $\triangle FGH$



٩) بما أن K في المنتصف، إذن KH = 2.5 = FK

FH = 2.5 + 2.5 = 5

HG=FG =FH= 5

إذن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع لأن جميع أضلاعه متساوية.

10) $\triangle GJL$

١٠) بما أن GL = LJ = 5 إذن $\triangle GJL$ متطابق الضلعين

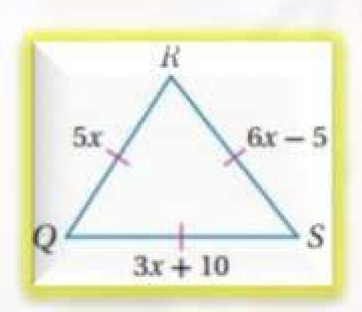
11) $\triangle FHL$

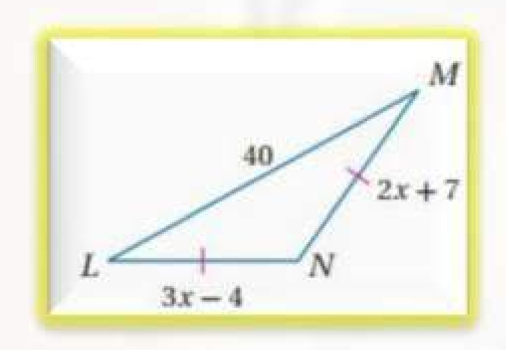
١١) بما أن $\triangle FHL$ جميع أطوال أضلاعه غير متساوية إذن هومختلف الأضلاع



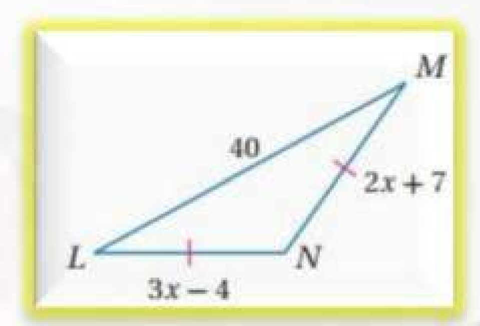


جبر :أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتيين:









١٢) بما أن المثلث ΔLNM متطابق الضلعين إذن LN =MN

LN = MN

$2X + 7 = 3X - 4$

$2X - 3X = -4 - 7$

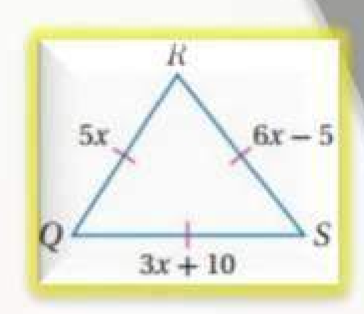
$-X = -11$

$X = 11$

$MN = 2 \times 11 + 7 = 29$

$LN = 3 \times 11 - 4 = 29$





١٣) بما أن المثلث ΔQRS متطابق الأضلاع إذن

$RS = QS = QR$

$6X - 5 = 5X$

$6X - 5X = 5$

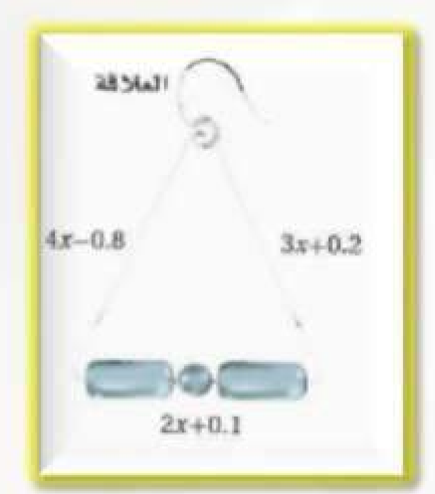
$X = 5$

$QR = 5X = 5 \times 5 = 25$

$RS = 6X - 5 = 6 \times 5 - 5 = 25$

$QS = 3X + 10 = 3 \times 5 + 10 = 25$





14) مجوهرات: افترض أن لديك سلكًا مرنًا من الفولاذ غير قابل للصدأ، وتريد أن تُشكّله لتعمل قرطًا. إذا كان الجزء المثلث من القرط متطابق الضلعين، وأبعاده كما في الصورة، وطول جزء العلاقة 1.5 cm، فكم سنتمترًا من السلك تحتاج لعمل القرط؟ برِّر إجابتك.



بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن:

$$(4x - 0.8) = (3x + 0.2)$$
$$x = 0.8 + 0.2 = 1$$

لتشكيل قرط واحد أحتاج إلى :

$$(4x - 0.8) + (3x + 0.2) + (2x + 0.1) + 1.5 =$$
$$9x - 0.5 = 9 - 0.5$$
$$= 8.5$$

إذن يمكن صنع قرط واحد سلك طوله ٨,٥

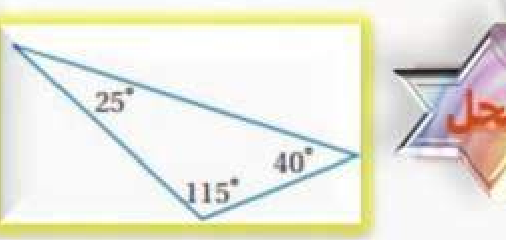




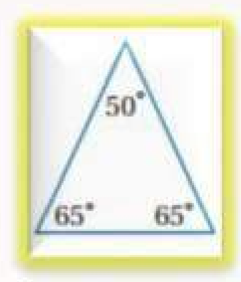


صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

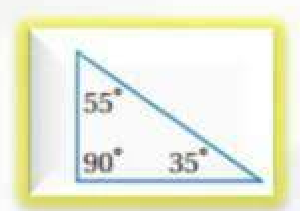




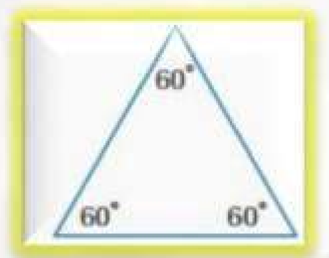
١٥) منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية أكبر من 90



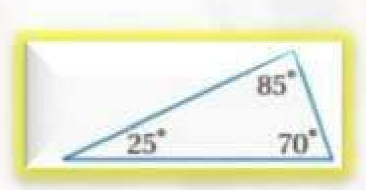

١٦) حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من 90



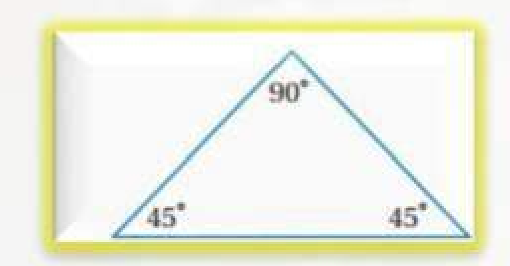
١٧) قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة = 90



١٨) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية




١٩) حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من 90

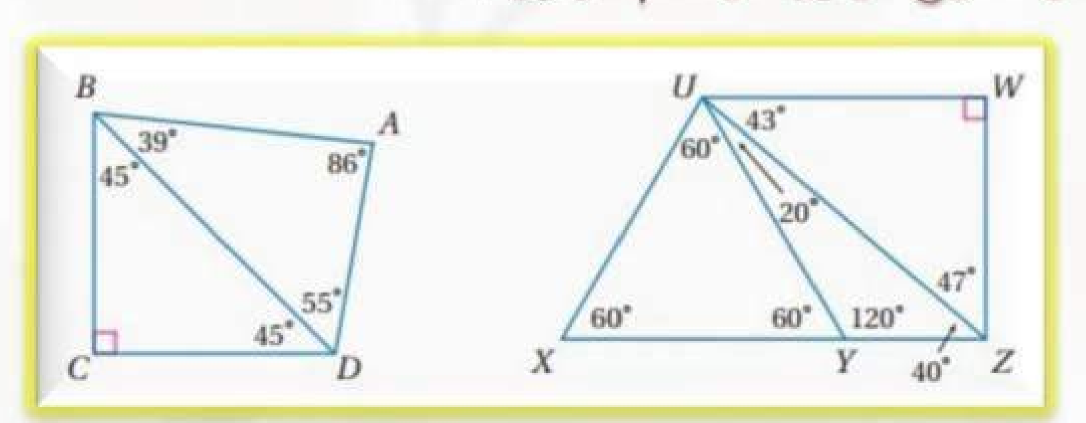


٢٠) قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة = 90





صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:





21) $\triangle UYZ$

٢١) منفرج الزاوية، لأنه يحتوي زاوية أكبر من ٩٠ وهي $\angle UYZ = 120$

22) $\triangle BCD$

٢٢) قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة = 90

23) $\triangle ADB$

٢٣) حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من 90

24) $\triangle UXZ$

٢٤) حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من 90

25) $\triangle UWZ$

٢٥) قائم الزاوية، ألنه يوجد زاوية قائمة = 90

26) $\triangle UXY$

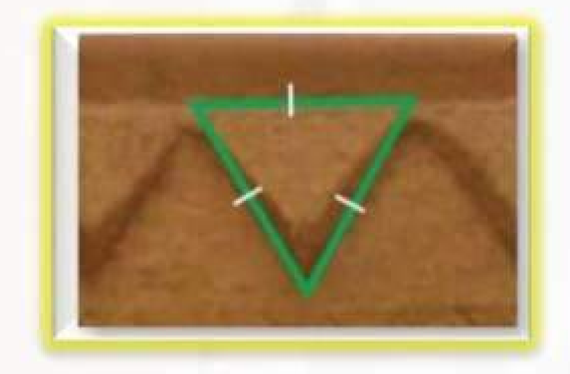
٢٦) متطابق الزوايا، جميع زواياه متساوية.





صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع :

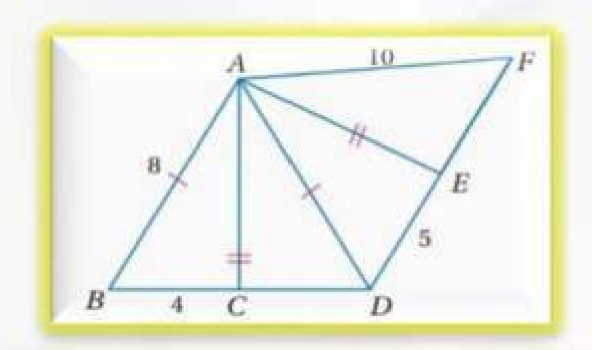






٢٨) مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

٢٧) متطابق الأضلاع لأن جميع أطوال أضالعه متساوية.





إذا كانت النقطة C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، فصنِّف كلًا من المثلثات الآتية وفقًا لأضلاعها:

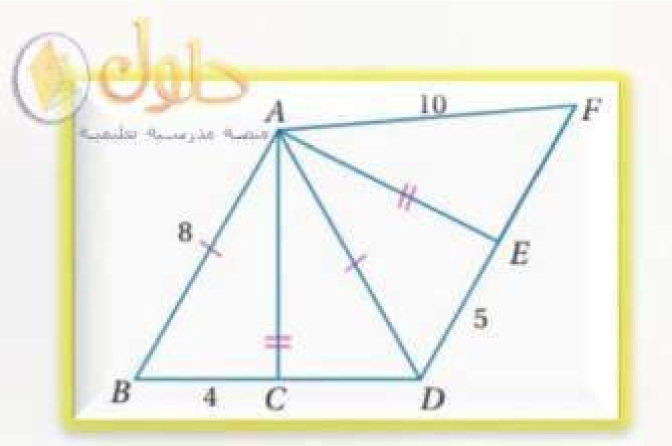
$\triangle ABC$ (29



بما أن C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$ إذن $4 = \overline{CD} = \overline{BC}$

وبما أن النقطة E منتصف $\overline{DF}$ إذن $5 = \overline{ED} = \overline{EF}$







$\triangle ADF$ (30

متطابق الضلعين لأن

$\overline{FD} = \overline{AF} = 10.$

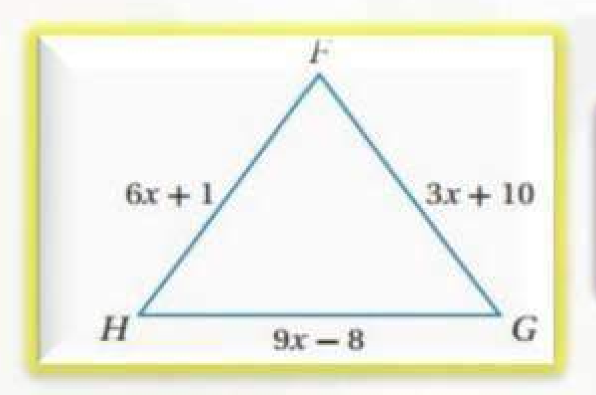
$\triangle ACD$ (31

مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

$\triangle ABD$ (32

متطابق الضلعين لأن

$\overline{AD} = \overline{AB} = 8.$





33) **جبر:** إذا علمت أن المثلث $\triangle FGH$ متطابق الأضلاع، فأوجد قيمة x وطول كل ضلع من أضلاعه.



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

$HF = FG$

$6X + 1 = 3X + 10$

$3X = 9$

$X = 3$

$HF = 6X + 1 = 6 \times 3 + 1 = 19$

$FG = 3X + 10 = 3 \times 3 + 10 = 19$

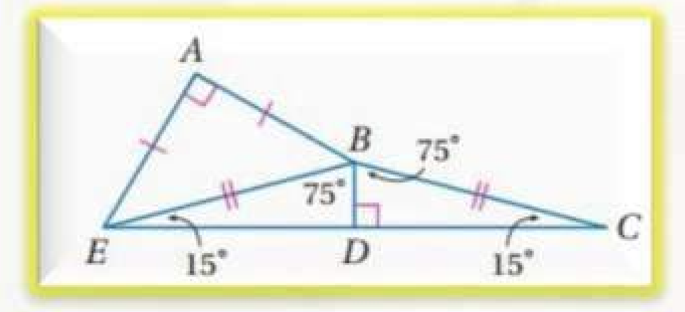
$HG = 9X - 8 = 9 \times 3 - 8 = 19$



34) **فنّ تشكيلي:** صنِّف كلًا من المثلثات المرقمة في الشكل وفق زواياه ثم وفق أضلاعه. استعمل المثلث القائم الزاوية لتصنيف الزوايا، والمسطرة لقياس الأضلاع.



1D:حاد الزوايا متطابق الضلعين
2D:قائم الزاوية مختلف الأضلاع
3D:منفرج الزاوية مختلف الأضلاع
4D:حاد الزوايا متطابق الأضلاع
5D:منفرج الزاوية مختلف الأضلاع



صنف كلا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:

35) $\triangle ABE$

36) $\triangle EBC$

37) $\triangle BDC$

الحل

قائم الزاوية لأن $\angle BAE = 90$ ومتطابق الضلعين لأن $AB = AE$

منفرج الزاوية لأن $\angle EBC = 150$ ومتطابق الضلعين $BE = BC$

قائم الزاوية ومختلف ألاضالع



هندسة إحداثية: أوجد أطوال أضلاع $\triangle XYZ$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وصنِّفه وفق أضلاعه:

(38 $X(-5, 9), Y(2, 1), Z(-8, 3)$



$X(-5,9),\ Y(2,1)$

$$d_{(XY)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-5))^2 + (1-9)^2}$$

$$\sqrt{49+64} = \sqrt{113}$$

$Y(2,1),\ Z(-8,3)$

$$d_{(YZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$\sqrt{100+4} = \sqrt{104}$$

$X(-5,9),\ Z(-8,3)$

$$d_{(XZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-8-(-5))^2 + (3-9)^2}$$

$$\sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

المثلث XYZ مختلف الأضلاع لأن جميع أطواله غير متساوية.




(39 $X(7, 6), Y(5, 1), Z(9, 1)$




$X\ (7,6),\ Y\ (5,1)$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-7)^2 + (1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$


$Y\ (5,1),\ Z\ (9,1)$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9-5)^2 + (1-1)^2}$$

$$\sqrt{16+0} = \sqrt{4}$$

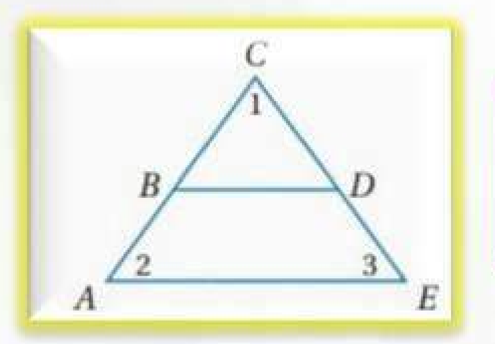
$X\ (7,6),\ Z\ (9,1)$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(9-7)^2 + (1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$


المثلث XYZ متطابق الضلعين لأن $\overline{XZ} = \overline{XY}$





40) برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين تبين فيه أنّ $\triangle BCD$ متطابق الزوايا، إذا كان $\triangle ACE$ متطابق الزوايا، وكانت $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



1) $\triangle ACE$ متطابق الزوايا و $AE \parallel BD$ (معطيات)

2) $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $\angle CBD \cong \angle 2$ و $\angle CDB \cong \angle 3$ (مسلمة الزاويتين المتناظرتين)

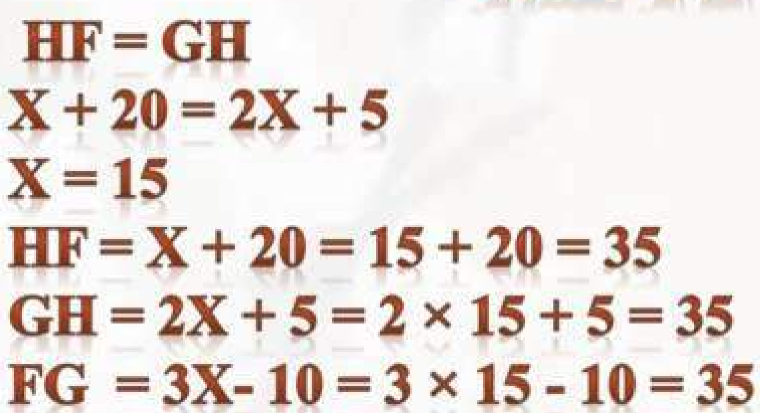
4) $\angle 1 \cong \angle CBD \cong \angle CDB$

5) $\triangle BCD$ متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)



جبر، أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كلٍّ مما يأتي:

41) $\triangle FGH$ مثلث متطابق الأضلاع فيه: $HF = x + 20$, $GH = 2x + 5$, $FG = 3x - 10$.



الحل

FGH ∆متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

HF = GH

X + 20 = 2X + 5

X = 15

HF = X + 20 = 15 + 20 = 35

GH = 2X + 5 = 2 × 15 + 5 = 35

FG = 3X- 10 = 3 × 15 - 10 = 35

42) $\triangle RST$ متطابق الأضلاع. ويزيد RS ثلاثة على أربعة أمثال x، ويزيد ST سبعة على مثلَي x، ويزيد TR واحدًا على خمسة أمثال x .

∆RST متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

RS = 4X + 3 , ST = 2X + 7, TR = 5X + 1 , RS = ST

4X + 3 = 2X + 7

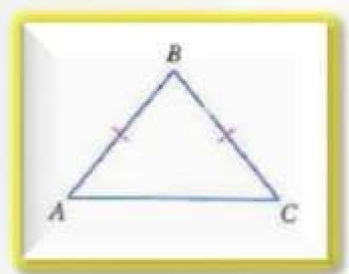
X = 2

RS = 4X + 3 = 4 ×2 + 3 = 11

ST = 2X + 7 = 2 ×2 + 7 = 11

TR = 5X+ 1 = 5×2 + 1 = 11

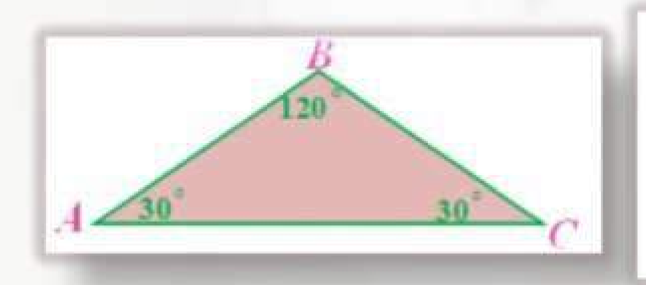


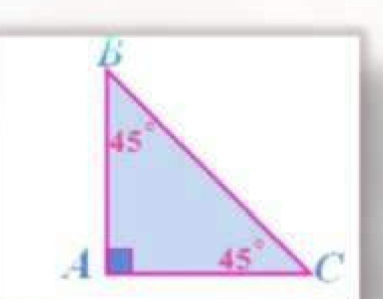


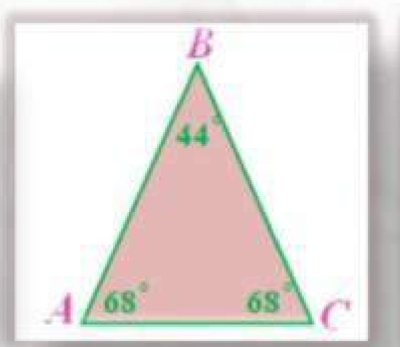
43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين قياسَي الزاويتين اللتين تقابلان ضلعين متطابقين في مثلث، ومجموع زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

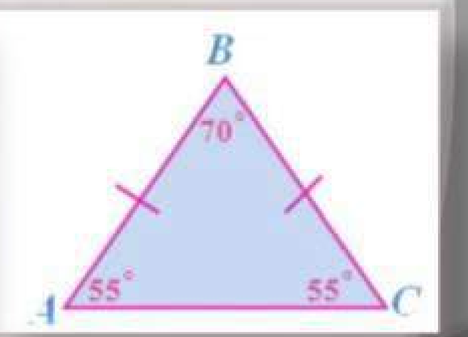


a) **هندسيًا:** ارسم أربعة مثلثات متطابقة الضلعين، منها مثلث حادّ الزوايا ومثلث قائم الزاوية، ومثلث منفرج الزاوية. وفي كلٍّ من هذه المثلثات سمِّ الرأسين المقابلين للضلعين المتطابقين A, C، وسمِّ الرأس الثالث B. ثم قس زوايا كل مثلث، واكتب على كل زاوية قياسها.









مثلث متطابق الأضلاع   مثلث حاد الزوايا   مثلث قائم الزاوية   مثلث منفرج الزاوية



b) **جدوليًا:** رتّب قياسات الزوايا في جدول. وضمّنه عمودًا تكتب فيه مجموع قياسات هذه الزوايا.

الحل

$m\angle A$	$m\angle C$	$m\angle B$	مجموع قياسات الزوايا
٥٥	٥٥	٧٠	١٨٠
٦٨	٦٨	٤٤	١٨٠
٤٥	٤٥	٩٠	١٨٠
٣٠	٣٠	١٢٠	١٨٠

c) **لفظيًا:** خمّن العلاقة بين قياسَيْ الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين، ثم خمّن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين.

الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقان،
ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي 180

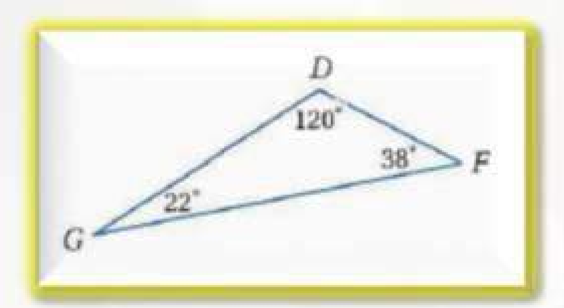
d) **جبريًا:** إذا كان قياس إحدى الزاويتين اللتين تقابلان الضلعين المتطابقين في مثلث متطابق الضلعين هو x، فاكتب عبارتين جبريتين تمثّلان قياسَيْ الزاويتين الأخريين. وفسّر إجابتك.

إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين
القياس نفسه وكان قياس إحداهما X، فان قياس الأخرى يساوي X
وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي180 فان
قياس الزاوية الثالثة يساوي 2X -180





44) **اكتشف الخطأ:** تقول ليلى: إن $\triangle DFG$ منفرج الزاوية، لكن نوال لا توافقها الرأي وتقول: إن عدد الزوايا الحادة في المثلث أكثر من عدد الزوايا المنفرجة؛ لذا فإن المثلث حادّ الزوايا. أيّتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.





ليلي إجابتها صحيحة، في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل لذا فبحسب كلام نوال فان جميع المثلثات تصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تصنف المثلثات وفقا للزاوية الثالثة .فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

تبرير: قرّر ما إذا كانت الجملة في كلٍّ مما يأتي صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضح إجابتك.

45) المثلث المتطابق الزوايا هو مثلث قائم الزاوية أيضًا.



غير صحيحة أبدا، جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاثة زوايا قياس كل منها60 ولذلك فإنها لا تحتوى زاوية قياسها 90فلا يمكن أن تكون قائمة الزاوية .



46) المثلث المتطابق الأضلاع هو مثلث متطابق الضلعين أيضًا.



صحيحة دائما، المثلث المتطابق الاضلاع فيه ثلاثة أضلاع لها الطول نفسه والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الاقل لهما الطول نفسه ولذا فان جميع المثلثات المتطابقة الاضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضا

47) **تحدٍ:** إذا كان طولا ضلعين من أضلاع مثلث متطابق الأضلاع $5x + 3$ وحدات، $7x - 5$ وحدات، فما محيطه؟ فسّر إجابتك.



بما أن المثلث متطابق الأضلاع فان أطوال أضلاعه متساوية ويكون محيط المثلث المتطابق الاضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول احد أضلاعه إذن

محيط المثلث= $23 \times 3 = 69$

$$7X - 5 = 5X + 3$$
$$X = 4$$
$$7X - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$$

48) **اكتب:** فسّر لماذا يُعد تصنيف المثلث المتطابق الزوايا أنه مثلث حاد متطابق الزوايا، تصنيفًا غير ضروري؟



في المثلث الحاد الزوايا ثلاثة زوايا حادة والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كل منها 60 وبما أن الزوايا التي قياسها 60 هي زوايا حادة فان جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا.



٣-٢ زوايا المثلث
Angles of Triangles



فيما سبق:

درست تصنيف المثلثات وفقًا لقياسات أضلاعها وزواياها.

والآن:

- أطبق نظرية مجموع زوايا المثلث.
- أطبق نظرية الزاوية الخارجية للمثلث.

المفردات:

المستقيم المساعد auxiliary line

الزاوية الخارجية exterior angle

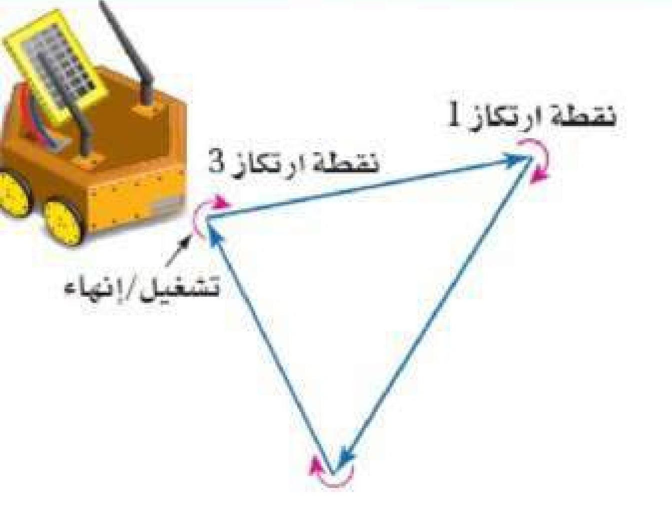
الزاويتان الداخليتان البعيدتان remote interior angles

البرهان التسلسليّ flow proof

النتيجة corollary

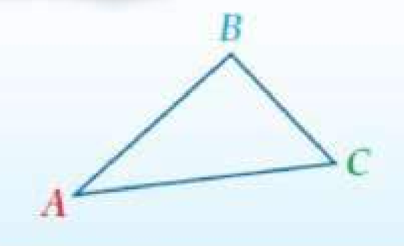
لماذا؟

يرعى أحد معاهد التقنية مسابقة سنوية، حيث يصمم الطلاب إنسانًا آليًا يؤدّي مهامّ مختلفة. وقد تمت برمجة هذا الإنسان الآلي في أحد الاختبارات ليتحرك في مسار على صورة مثلث. على أن يكون مجموع قياسات الزوايا التي ينعطف بها الإنسان الآلي عند نقاط الارتكاز الثلاث ثابتًا دائمًا.



نظرية مجموع زوايا المثلث: تُعبر نظرية مجموع زوايا المثلث عن العلاقة بين الزوايا الداخلية لأيّ مثلث.

نظرية 3.1 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث



التعبير اللفظي: مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$.

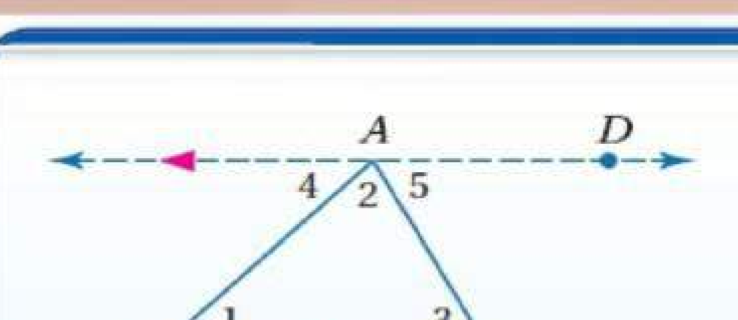
مثال: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$





برهان

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث



المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

البرهان: ارسم من النقطة A المستقيم $\overleftrightarrow{AD}$ موازيًا لِـ $\overline{BC}$.

العبارات	المبررات
1) $\triangle ABC$	**1)** مُعطى
2) $\angle BAD$, $\angle 4$ زاويتان متجاورتان على مستقيم.	**2)** تعريف الزاويتين المتجاورتين على مستقيم
3) $\angle BAD$, $\angle 4$ متكاملتان.	**3)** الزاويتان المتجاورتان على مستقيم متكاملتان
4) $m\angle 4 + m\angle BAD = 180°$	**4)** تعريف الزاويتين المتكاملتين
5) $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	**5)** مسلّمة جمع الزوايا
6) $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$	**6)** بالتعويض
7) $\angle 4 \cong \angle 1$, $\angle 5 \cong \angle 3$	**7)** نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
8) $m\angle 4 = m\angle 1$, $m\angle 5 = m\angle 3$	**8)** تعريف تطابُق الزوايا
9) $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$	**9)** بالتعويض

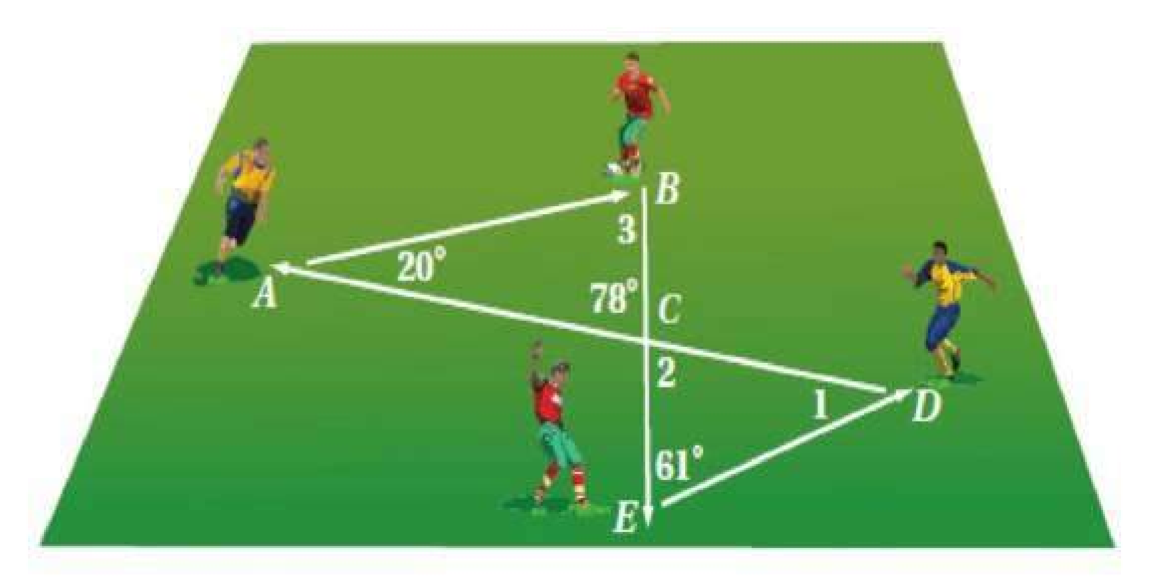
٣-٢ زوايا المثلث
Angles of Triangles




مثال 1 من واقع الحياة

استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة قدم: يبيِّن الشكل مسار الكرة في تدريب على التمريرات نفَّذها أربعة لاعبين.



افهم: تفحّص المعلومات المعطاة في الشكل أعلاه، تعرف قياسي زاويتين من زوايا أحد المثلثين وقياس زاوية واحدة من زوايا المثلث الآخر. وتعرف كذلك أن $\angle 2$ ، $\angle ACB$ زاويتان متقابلتان بالرأس.

خطط: أوجد $m\angle 3$ باستعمال نظرية مجموع زوايا المثلث مستعملًا قياسيْ الزاويتين الأخريين في $\triangle ABC$. ثم استعمل نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس لإيجاد $m\angle 2$. وعندها يمكنك إيجاد $\angle 1$ في $\triangle CDE$.

الربط مع الحياة

يدمج تمرين "مرِّر وتحرَّك" في لعبة كرة القدم بين عدة مظاهر أساسية لعملية التمرير. حيث تكون جميع التمريرات في التدريب على صورة مثلثات، وهذا هو الأساس في جميع حركات الكرة، وبالإضافة إلى ذلك على اللاعب أن يتحرك فورًا بعد تمريره الكرة.

حُلّ:

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180^\circ$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$ بالتعويض

$m\angle 3 + 98^\circ = 180^\circ$ بالتبسيط

$m\angle 3 = 82^\circ$ اطرح 98 من الطرفين

$\angle 2$, $\angle ACB$ متطابقتان؛ لأنهما زاويتان متقابلتان بالرأس؛ لذا فإن $m\angle 2 = 78^\circ$.

استعمل $m\angle 2$ و $\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180^\circ$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$ بالتعويض

$m\angle 1 + 139^\circ = 180^\circ$ بالتبسيط

$m\angle 1 = 41^\circ$ اطرح 139 من الطرفين

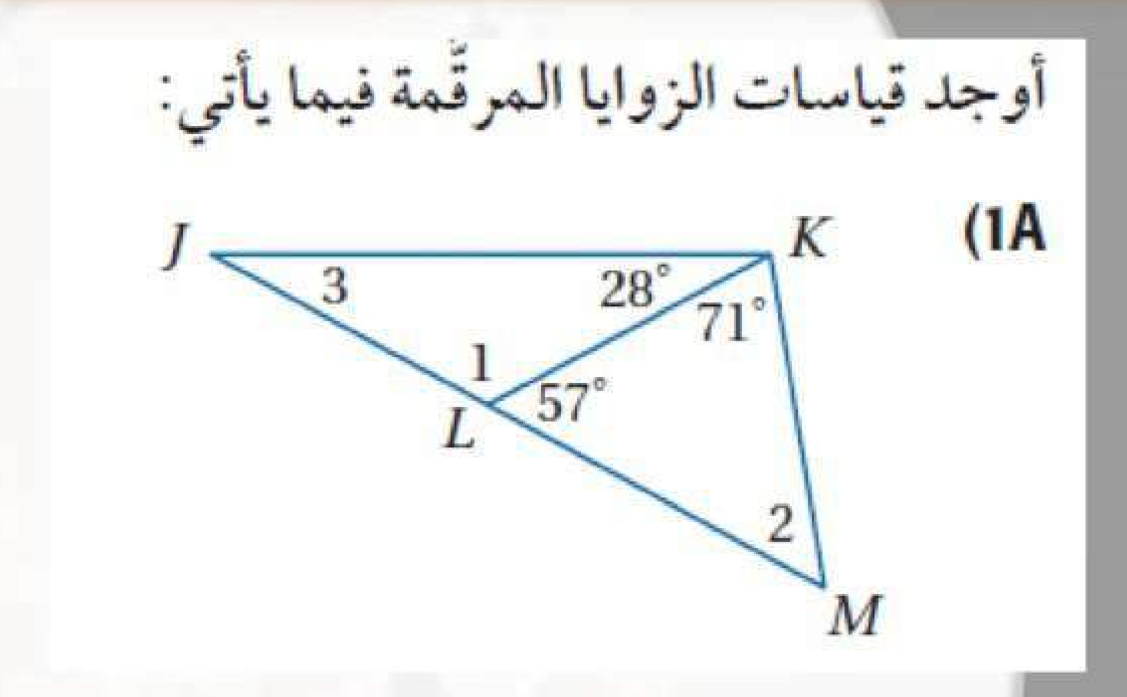
تحقق: يجب أن يكون مجموع قياسات زوايا كلٍّ من $\triangle CDE$, $\triangle ABC$ مساويًا لِـ 180.

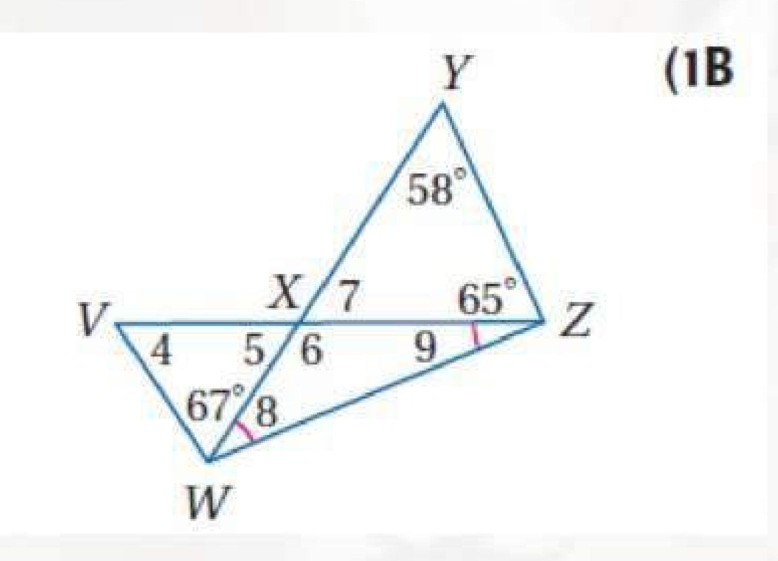
✓ $\triangle ABC: \; m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82^\circ + 20^\circ + 78^\circ = 180^\circ$

✓ $\triangle CDE: \; m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41^\circ + 78^\circ + 61^\circ = 180^\circ$



أوجد قياسات الزوايا المرقّمة فيما يأتي:





(1A $m\angle 1 = 123^\circ, m\angle 2 = 52^\circ, m\angle 3 = 29^\circ$

(1B $m\angle 4 = 56^\circ, m\angle 5 = 57^\circ, m\angle 6 = 123^\circ,$
$m\angle 7 = 57^\circ, m\angle 8 = m\angle 9 = 28.5^\circ$

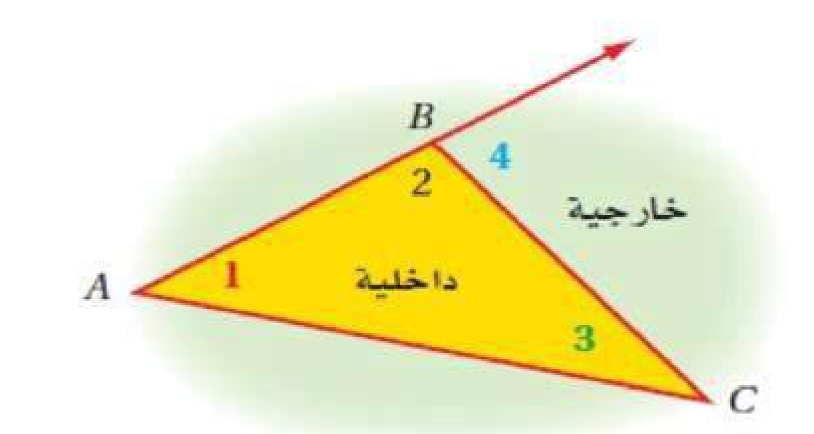




Angles of Triangles

نظرية الزاوية الخارجية للمثلث: بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث يمكن أن يكون للمثلث **زوايا خارجية** تتشكل كل منها من أحد أضلاع المثلث وامتداد ضلع مجاور له. ولكل زاوية خارجية **زاويتان داخليتان بعيدتان** غير مجاورتين لها.

$\angle 4$ زاوية خارجية لِـ $\triangle ABC$، وزاويتاها الداخليتان البعيدتان هما $\angle 3$ ، $\angle 1$.

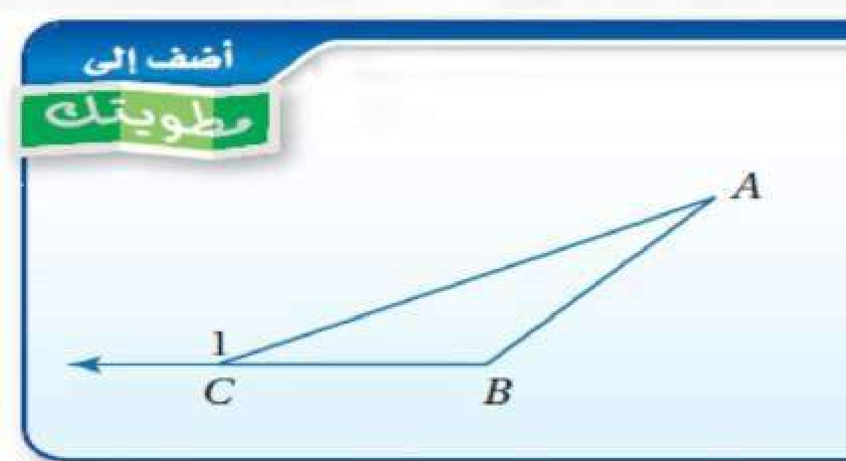


نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

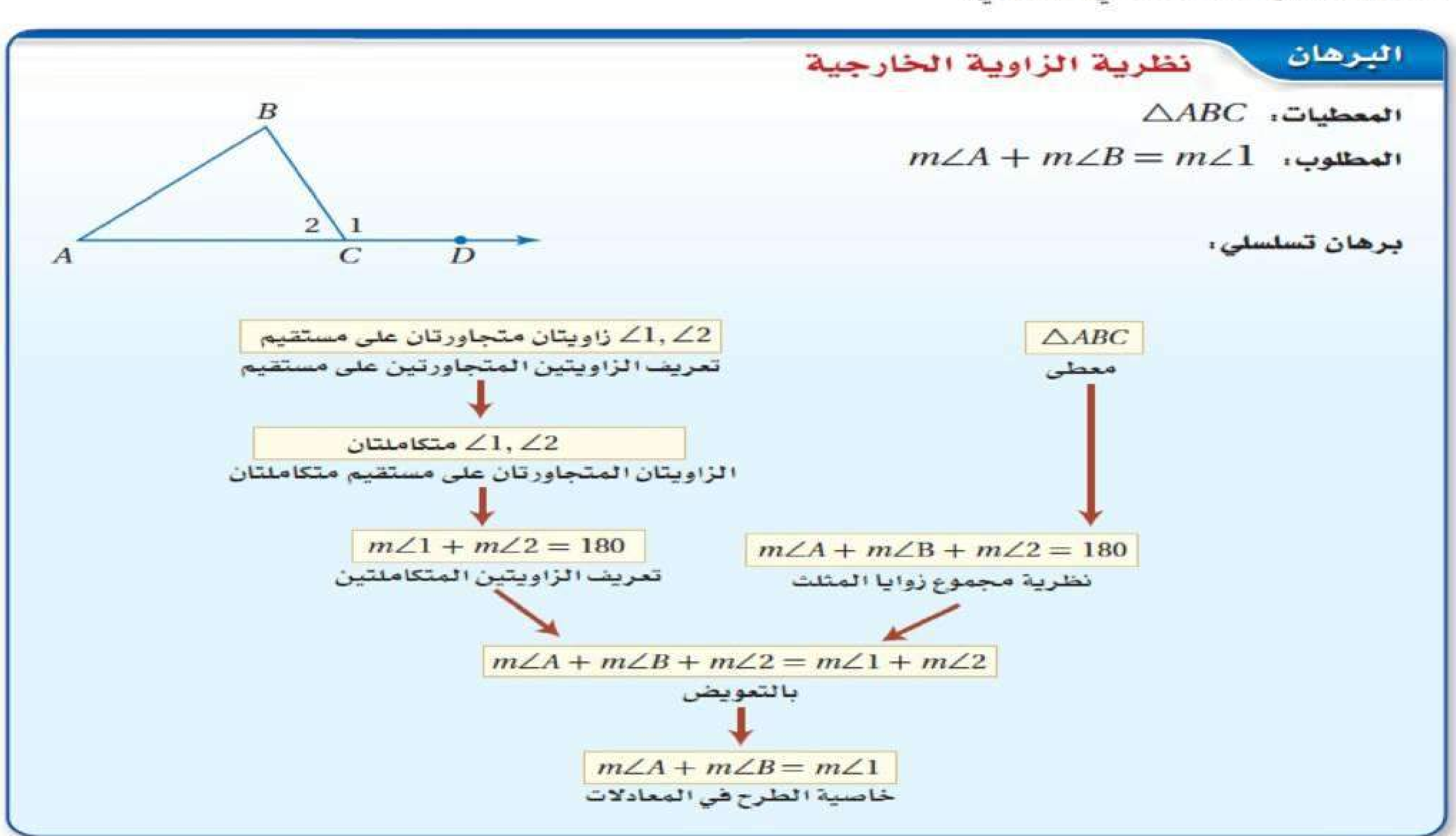
قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسَيْ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



٣-٢ زوايا المثلث
Angles of Triangles

تستعمل في **البرهان التسلسلي** عبارات مكتوبة في مستطيلات، وأسهم تبيّن التسلسل المنطقي لهذه العبارات. ويكتب أسفل كل مستطيل السبب الذي يبرّر العبارة المكتوبة داخله، ويمكنك برهنة نظرية الزاوية الخارجية باستعمال البرهان التسلسليّ كما يأتي.



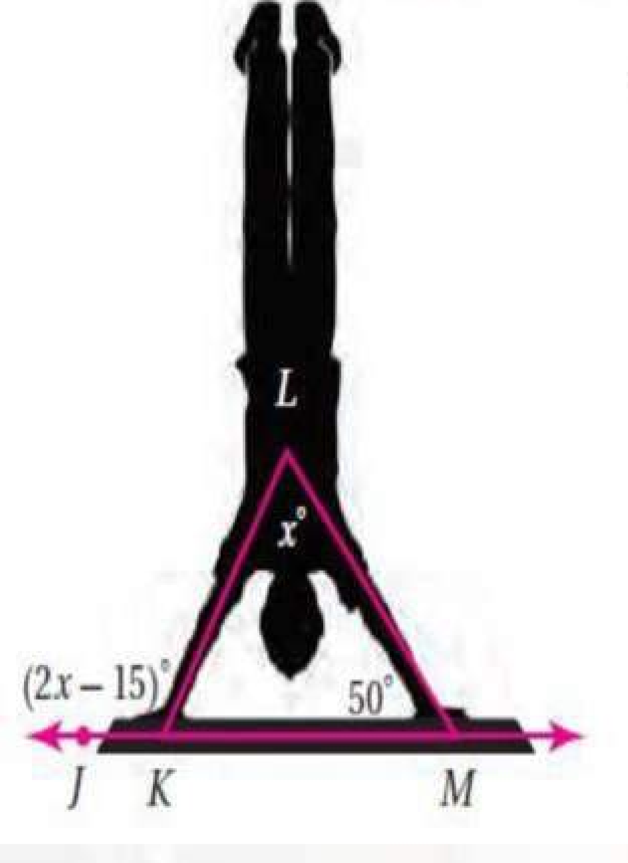


يمكن إيجاد قياسات الزوايا المجهولة باستعمال نظرية الزاوية الخارجية.



مثال 2 من واقع الحياة — استعمال نظرية الزاوية الخارجية

اللياقة البدنية: أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضع الذي يظهر فيه المتدرب في الصورة:



$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$	نظرية الزاوية الخارجية
$x + 50 = 2x - 15$	بالتعويض
$50 = x - 15$	اطرح x من الطرفين
$65 = x$	أضف 15 إلى الطرفين

لذا فإن $m\angle JKL = (2(65) - 15)^\circ = 115^\circ$.

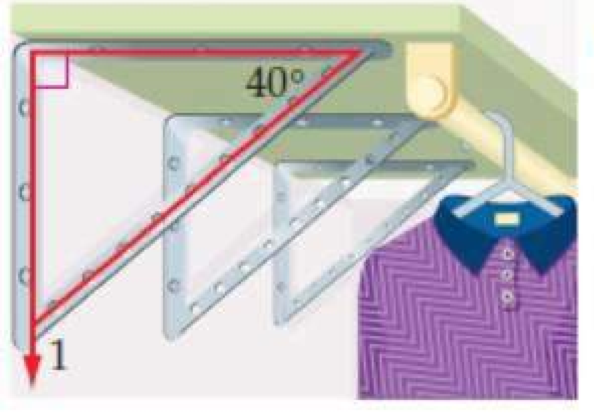
الربط مع الحياة

المدرب الخاص يعلّم مدربو اللياقة البدنية المتدربين طرائق متنوعة ويحفزونهم على أدائها. من المهم أن يحمل هؤلاء المدربون شهادات تخصص في مجال عملهم.





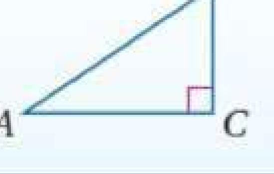
2) **تنظيم خزانة الملابس:** تثبِّت لطيفة جسور الرفوف على جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$ التي يصنعها الجسر مع جدار الخزانة؟



نظرية الزاوية الخارجية للمثلث

$$M(\angle 1) = 90° + 40°$$

$$M(\angle 1) = 130°$$



نتيجتان

مجموع زوايا المثلث

3.1 الزاويتان الحادتان في أي مثلث قائم الزاوية متتامتان.

مثال: إذا كانت $\angle C$ قائمة، فإن $\angle B$, $\angle A$ زاويتان متتامتان.

B A C

3.2 يوجد زاوية قائمة واحدة أو منفرجة واحدة على الأكثر في أي مثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ قائمة فإن $\angle K$, $\angle J$ زاويتان حادتان.

J K L

إرشادات للدراسة

التحقق من المعقولية

عندما تجد قياسات زوايا مثلث، تأكد دائمًا أن مجموع هذه القياسات يساوي 180°.

مثال 3 إيجاد قياسات الزوايا في مثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياس كل من الزوايا المرقّمة في الشكل المجاور.

T W 4 3 1 2 Z 52° 38° Y X

$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90^\circ$	زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية
$m\angle 1 + 52^\circ = 90^\circ$	بالتعويض
$m\angle 1 = 38^\circ$	اطرح 52 من الطرفين

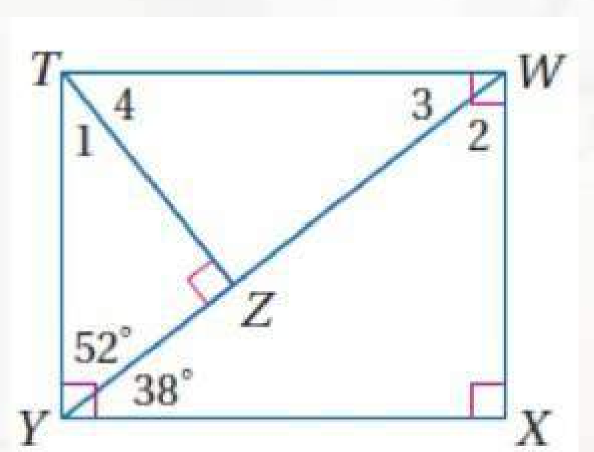
$\angle 2$ (3A

$M(\angle 2) + 38° = 90°$ نتيجة

$M(\angle 2) = 90° - 38°$

$M(\angle 2) = 52°$

$\angle 3$ (3B



$M(\angle 3) = 38°$ بالتبادل

$\angle 4$ (3C

$M(\angle 4) + m(\angle 3) = 90°$ $M(\angle 4) = 90° - 38°$

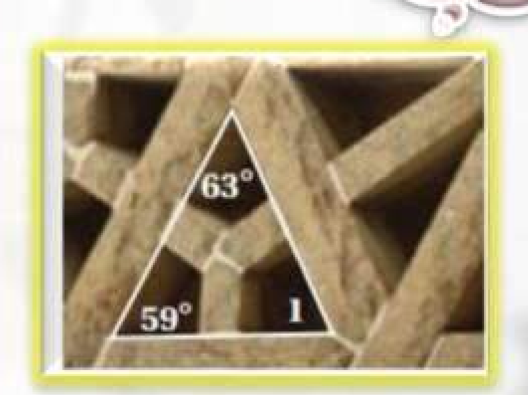
$M(\angle 4) = 52°$

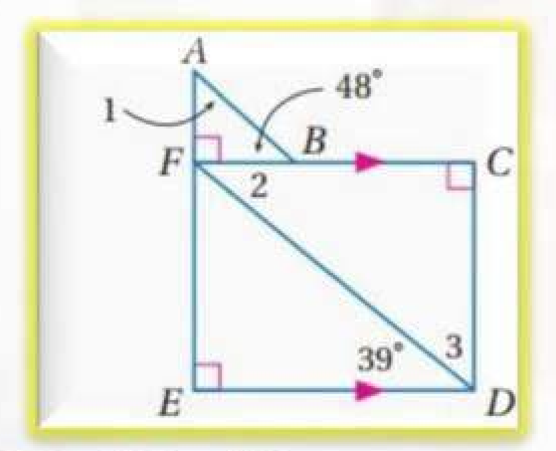




المثال ١

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين :





الحل

بما أن زوايا المثلث الداخلة = 180إذن:

$\angle 1 = 180 - (63 + 59)$

$\angle 1 = 58$



$\angle 1 = 180 - (90 + 48)$

$\angle 1 = 42$

$\angle 2 = 39$ نظرية الزاويتان المتبادلتان داخليا

$\angle 3 = 90 - 39$

$\angle 3 = 51$



كراسي الشاطئ: تشكل دعامة المقعد مع بقية الهيكل مثلثًا كما هو موضح في الشكل المجاور. أوجد كلًّا من القياسات الآتية:



الحل

3) $m\angle 2$

$\angle 2 + 53 = 102$

$\angle 2 = 102 - 53$ نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$\angle 2 = 49$

4) $m\angle 4$

$\angle 4 = 180 - 53$

$\angle 4 = 127$

5) $m\angle 1$

$\angle 1 = 180 - 102$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة =180

$\angle 1 = 78$

6) $m\angle 3$

$\angle 3 = 180 + \angle 3$

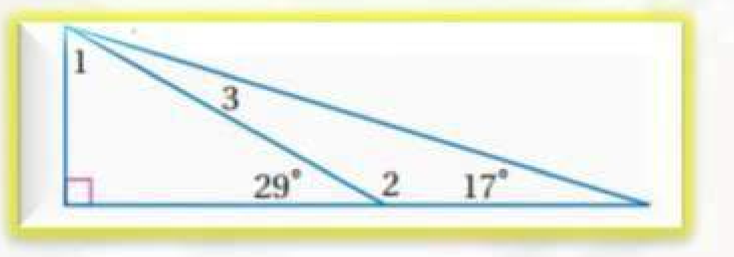
$\angle 3 = 180 + 49$

$\angle 3 = 131$





معتمدًا على الشكل المجاور، أوجد القياسات التالية:



7) $m\angle 1$

الحل

$\angle 1 = 180 - (90 + 29)$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180

$\angle 1 = 61$

8) $m\angle 3$

$\angle 1 + \angle 3 = 180 - (90 + 17)$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180

$61 + \angle 3 = 73$

$\angle 3 = 12$

9) $m\angle 2$

$\angle 2 = 180 - (\angle 3 + 17)$

$\angle 2 = 180 - (12 + 17)$

$\angle 2 = 151$

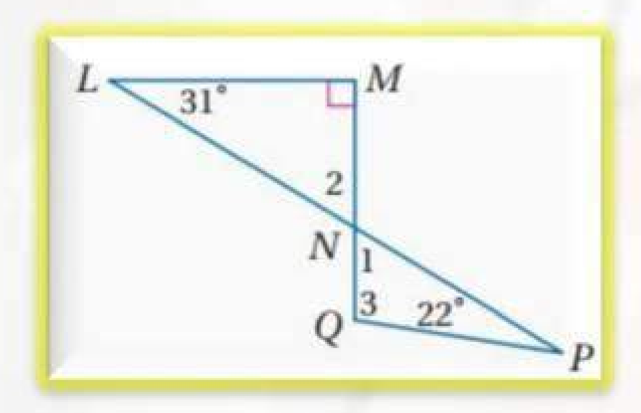






أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:







$\angle 1 = 180 - (59 + 61)$

$\angle 1 = 60$

$\angle 2 = 180 - (31 + 90)$

$\angle 2 = 59$

$\angle 2 = \angle 1 = 59$

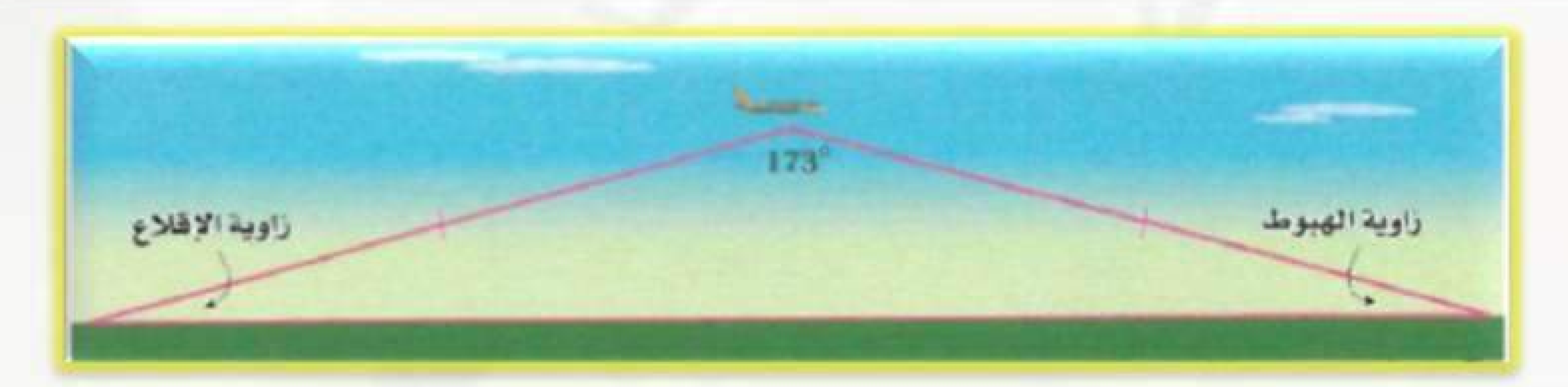
نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\angle 3 = 180 - (\angle 1 + 22)$

$\angle 3 = 180 - (59 + 22)$

$\angle 3 = 99$

12) طائرات: يمكن تمثيل خطّ الطيران في رحلةٍ ما باستعمال ضلعَي مثلث كما في النموذج أدناه، علمًا بأن المسافة التي تقطعها الطائرة صعودًا تساوي المسافة التي تقطعها هبوطًا.







a) صنّف النموذج بحسب الأضلاع والزوايا.

متطابق الضلعين، منفرج الزاوية

b) إذا كانت زاويتا الإقلاع والهبوط متطابقتين، فأوجد قياس كلّ منهما.

بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان

وبما أن مجموع زوايا المثلث = 180إذن:

$7 = 180 - 173$

$3.5 = 2 \div 7$

زاوية الهبوط والإقلاع = 3.5



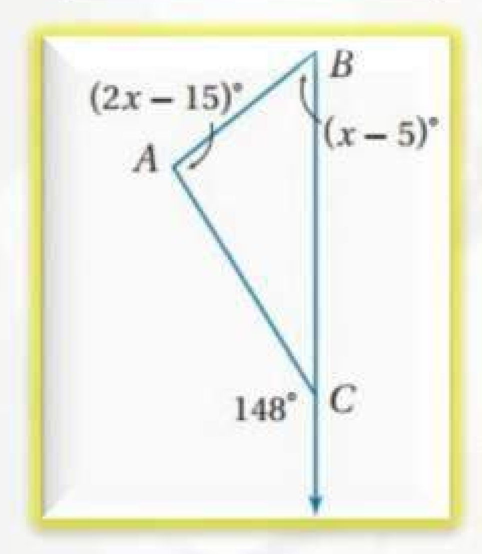


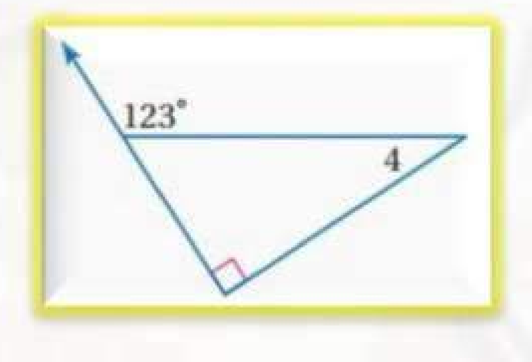
اوجد كلا من القياسات الآتية :

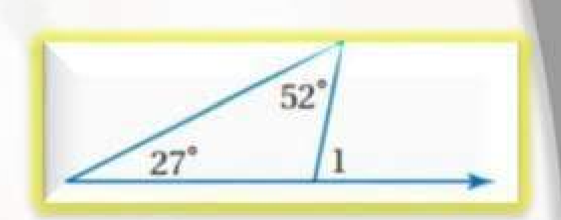
$m\angle ABC$ (15

$m\angle 4$ (14

$m\angle 1$ (13









$\angle 1 = 27 + 52 = 79$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

$123 = \angle 4 + 90$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

$\angle 4 = 123 - 90 = 33$

$148 = (2X - 15) + (X - 5)$

$148 = 3X - 20$

$148 + 20 = 3X$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

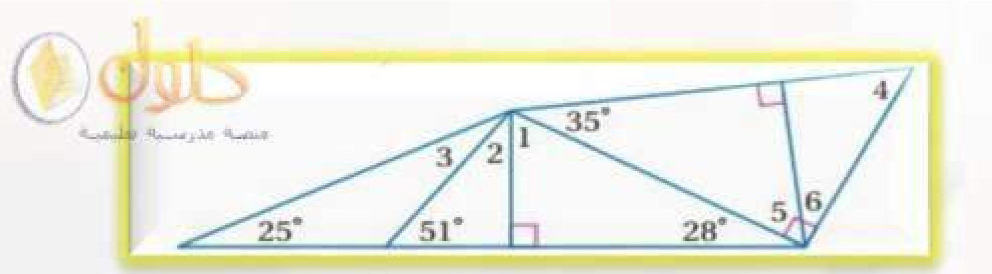
$168 = 3X$

$X = 56$

$\angle ABC = X - 5 = 56 - 5 = 51$



اوجد كلا من القياسات الآتية :



الحل

$m\angle 1$ (16

$\angle 1 = 180 - (90 + 28)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180

$\angle 1 = 62$

$m\angle 2$ (17

$\angle 2 = 180 - (90 + 51)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180

$\angle 2 = 39$

$m\angle 3$ (18

$\angle 3 = 180 - (129 + 25)$

51نظرية الزاويتان المتجاورتان للزاوية

180 =ونظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$\angle 3 = 26$

$m\angle 5$ (19

$\angle 5 = 180 - (35 + 90)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180

$\angle 5 = 55$

$m\angle 4$ (20

$\angle 4 = 180 - (35 + 90)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180

$\angle 4 = 55$

$m\angle 6$ (21

$\angle 6 = 180 - (\angle 4 + 90)$

180 =نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$\angle 6 = 180 - (55 + 90)$

$\angle 6 = 35$





22) **بستنة:** استَنْبَتَ مهندس زراعيّ زهور أقحوان في حوض على شكل مثلث متطابق الضلعين. إذا رغب المهندس في أن يكون قياس $\angle A$ ثلاثة أمثال قياس كل من $\angle B, \angle C$، فما قياس كل زاوية في هذا المثلث؟

الحل

$\angle A = 3\angle B \ , \ \angle A = 3\angle C$

$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C)$

مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle B = 180 - C$

$4\angle B + C = 180 \rightarrow 1$

$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle C = 180 - B$

$4\angle C + B = 180 \quad \times -4$

$-4B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$

بجمع المعادلتين ١ و ٢

$\cancel{-}15\angle C = \cancel{-}540$

$\angle C = \frac{540}{15}$

$\angle C = 36^\circ$

$\angle B = 36^\circ$

$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$

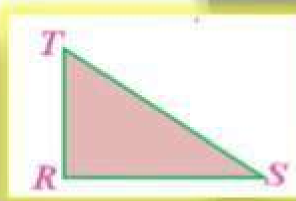


براهين :برهن كل مما يأتي مستعملا طريقة البرهان المذكورة:

23) النتيجة 3.1 باستعمال البرهان التسلسلي









البرهان:

ΔMNO فيه $\angle M$ قائمة.

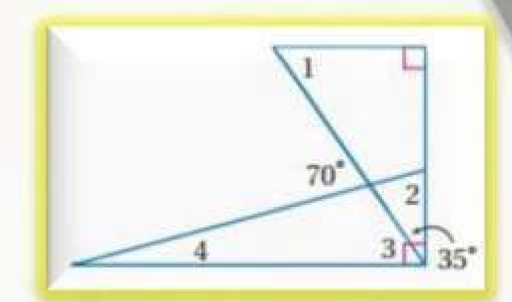
$m\angle M + m\angle N + m\angle O = 180^\circ$ ، $m\angle M = 90^\circ$ ، ولذلك فإن

$m\angle N + m\angle O = 90^\circ$. فإذا كانت N زاوية قائمة فسيكون

$m\angle O = 0^\circ$. وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.



أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:







$M \angle 1 = 180 - (35 + 90)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$M \angle 1 = 180 - 125$

$M \angle 1 = 55$

الزاوية المجاورة ل 70 =110 حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم

وكذلك الزاوية المجاورة ل 110=70 حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم

$M \angle 2 = 180 - (70 + 35)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$M \angle 2 = 75$

$M \angle 4 = 180 - (M \angle 2 + 90)$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$M \angle 4 = 180 - (75 + 90)$

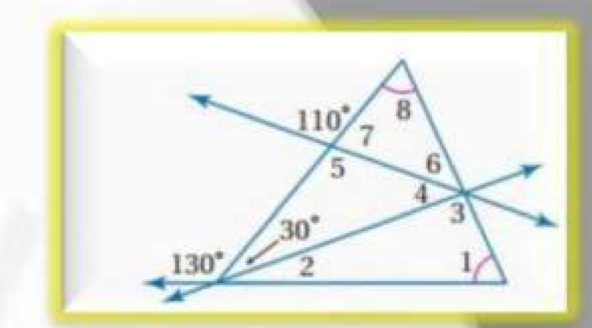
$M \angle 4 = 15$

$M \angle 3 = 180 - (M \angle 4 + 110)$

$M \angle 3 = 180 - (15 + 110)$

$M \angle 3 = 55$







$M\angle 7 = 180 - 110$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$M\angle 7 = 70$

$M\angle 5 = 110$ بالتقابل بالرأس

$M\angle 4 = 180 - (110 + 30)$

$M\angle 4 = 40$

$M\angle 2 = 180 - (130 + 30)$

$M\angle 2 = 20$

$(\angle 30 + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 1) = 180$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$\because \angle 8 = \angle 1$

$\therefore (30 + 20) + (\angle 1 + \angle 1) = 180$

$50 + 2\angle 1 = 180$

$2\angle 1 = 180 - 50 = 130$

$\angle 1 = 65$

$\angle 8 = 65$

$\angle 6 = 180 - (\angle 8 + \angle 7)$

$\angle 6 = 180 - (65 + 70)$

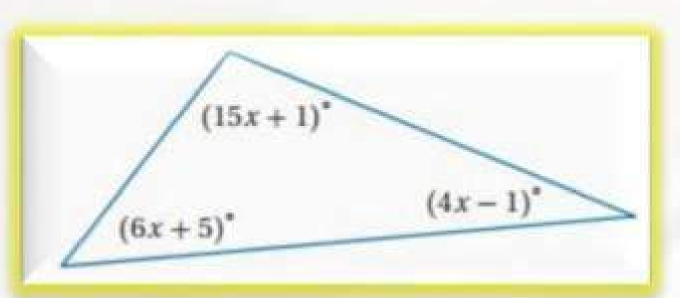
$\angle 6 = 49$

$\angle 3 = 180 - (\angle 1 + \angle 2)$

$\angle 3 = 180 - (65 + 20)$

$\angle 3 = 95$





27) جبر :صنف المثلث المجاور وفقا لزواياه ,وفسر إجابتك.



منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فان X = 7، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي 106 , 47 , 27

$(15X+1)+(6X+5)+(4X-1)=180$

$25X+5=180$

$25X=175$

$X=7$

$15X+1=15\times 7+1=106$

$6X+5=47$

$4X-1=27$



28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

" إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90 ، فإن المثلث حادّ الزوايا " .



صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فان قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فان زوايا هذه المثلث الثلاث حادة وهو مثلث حاد الزوايا.





a) أوجد $m\angle 1 , m\angle 2$.



$\angle 2 = 180 - (70 + 71)$

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle 2 = 39$

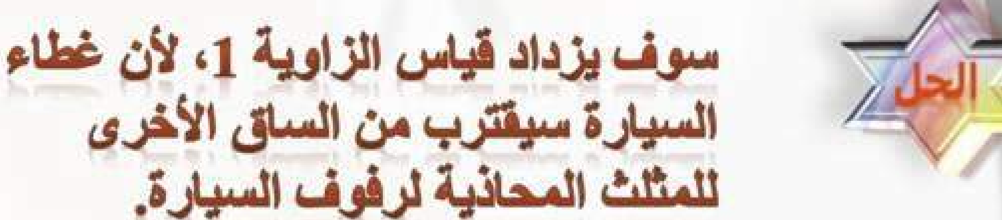
$\angle 1 = (70 + 71)$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$\angle 1 = 141$







الحل

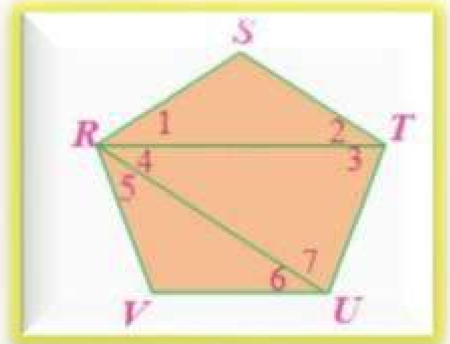
سوف يزداد قياس الزاوية 1، لأن غطاء السيارة سيقترب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.

c) إذا قلَّ ارتفاع غطاء السيارة عن الارتفاع الذي يظهر في الصورة، فما أثر ذلك في $m\angle 2$ ؟ فسِّر إجابتك.

سوف يقل قياس الزاوية 2، لأن قياس الزاوية 1سوف يزداد ولأن هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.



برهان: برهن كلًا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:



30) برهان ذو عمودين

المعطيات: $RSTUV$ شكل خماسيّ.

المطلوب:
$m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540°$

الحل



1) RSTUV خماسي (معطى)

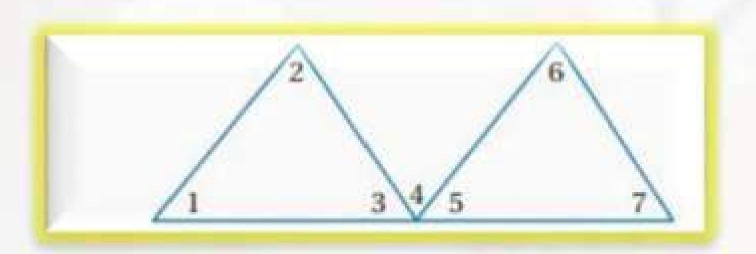
2) $M\angle S + M\angle 1 + M\angle 2 = 180$,
$M\angle 3 + M\angle 4 + M\angle 7 = 180$,
$M\angle 6 + M\angle V + M\angle 5 = 180$
(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

3) $M\angle S + M\angle 1 + M\angle 2 + M\angle 3 + M\angle 4 + M\angle 7 + M\angle 6 + M\angle V + M\angle 5 = 540$
خاصية الجمع للمساواة

4) $M\angle VRS = M\angle 1 + M\angle 4 + M\angle 5$
$M\angle TUV = M\angle 7 + M\angle 6$,
$M\angle STU = M\angle 2 + M\angle 3$
(مسلمة جمع الزوايا)

5) $M\angle S + M\angle STU + M\angle TUV + M\angle V + M\angle VRS = 540$
(بالتعويض)







31) برهان تسلسلي

المعطيات، $\angle 3 \cong \angle 5$

المطلوب، $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$



$\angle 3 = \angle 5$

معطى

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 5$
$m\angle 6 + m\angle 7 = m\angle 3 + m\angle 4$

نظرية الزاوية الخارجية

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$

بالتعويض

$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$

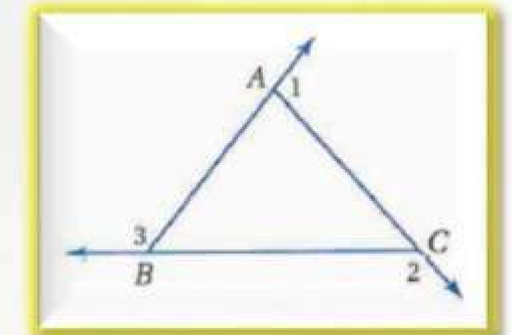
خاصية الإبدال

$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$

بالتعويض

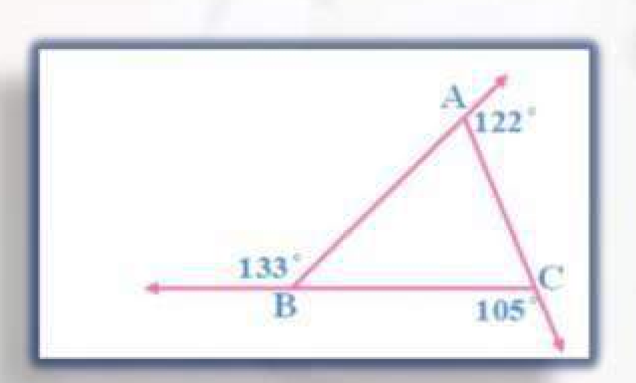


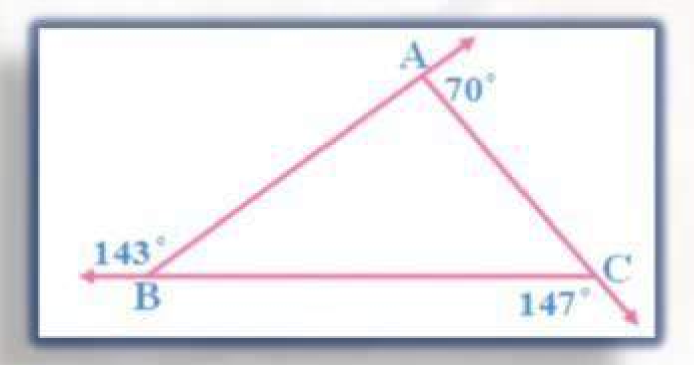


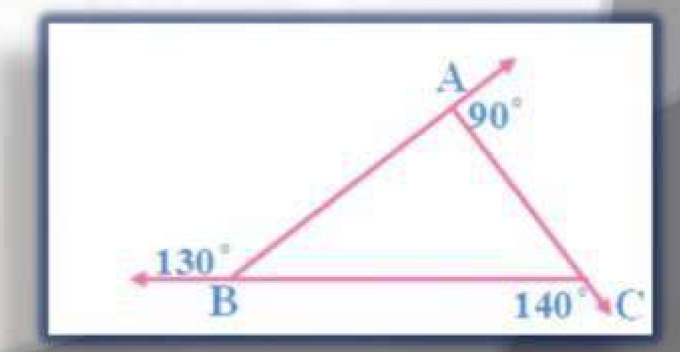


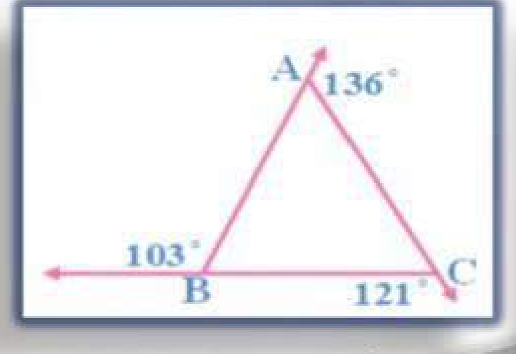
a) هندسيًّا: ارسم خمسة مثلثات مختلفة، ومُدّ الأضلاع وسمِّ الزوايا كما في الشكل المجاور، على أن يكون ضمن المثلثات التي رسمتها على الأقل مثلث منفرج الزاوية، وآخر قائم الزاوية، ومثلث حادّ الزوايا.

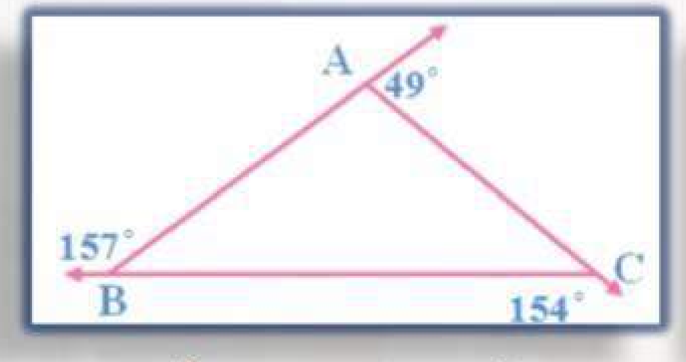
الحل









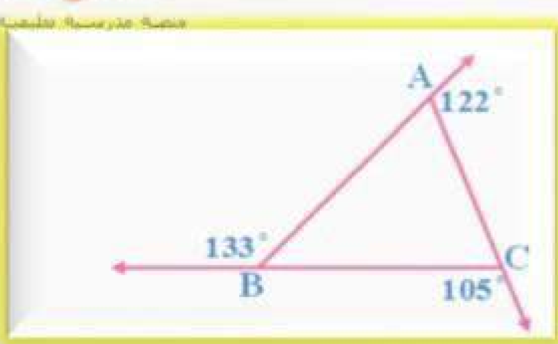


مثلث قائم الزاوية

مثلث حاد الزوايا


مثلث منفرج الزاوية





b) جدوليًا : قِسِ الزوايا الخارجية لكل مثلثٍ. وسجِّل القياسات ومجموعها لكل مثلثٍ في جدول.

الحل

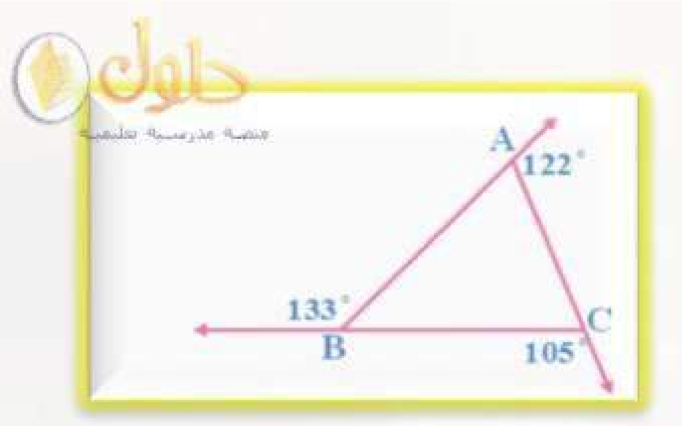
∠1	∠2	∠3	المجموع
١٢٢	١٠٥	١٣٣	٣٦٠
٧٠	١٤٧	١٤٣	٣٦٠
٩٠	١٤٠	١٣٠	٣٦٠
١٣٦	١٢١	١٠٣	٣٦٠
٤٩	١٥٤	١٥٧	٣٦٠


c) لفظيًا : خمِّن مجموع الزوايا الخارجية للمثلث، واكتب تخمينك.

لفظيا :مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360

d) جبريًا : عبِّر عن التخمين الذي وصلتَ إليه في الجزء c جبريًا.

$$M\angle 1 + M\angle 2 + M\angle 3 = 360$$



e) **تحليليًا،** اكتب برهانًا حرًا لإثبات التخمين الذي توصلت إليه.



تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن

$M\angle 3 = M\angle CBA + M\angle BCA,$

وأن

$M\angle 2 = M\angle BAC + M\angle CBA, M\angle 1 = M\angle CBA + M\angle BCA$

وبالتعويض

$M\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = M\angle CBA + M\angle BCA + M\angle BAC + M\angle CBA +$
$M\angle CAB + M\angle BCA$.

ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$M\angle 1 + M\angle 2 + M\angle 3 = 2M\angle CBA + 2M\angle BCA + 2M\angle BAC$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$M\angle 1 + M\angle 2 + M\angle 3 = 2(M\angle CBA + M\angle BCA + M\angle BAC)$

وتخبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن

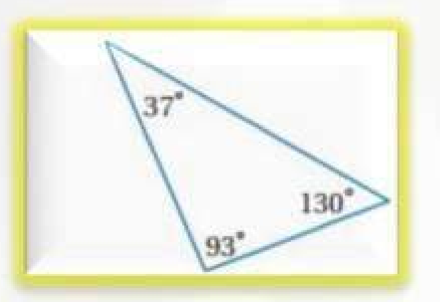
$M\angle CBA + M\angle BCA + M\angle BAC = 180$

وبالتعويض ينتج أن

$M\angle 1 + M\angle 2 + M\angle 3 = 2(180) = 360$





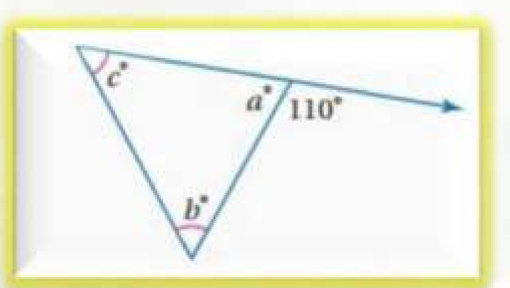


33) **اكتشف الخطأ:** قام خالد بقياس زوايا المثلث وكتبها كما في الشكل. فقال عادل: إنّ هناك خطأً في هذه القياسات. وضِّح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف توصّل عادل إلى هذه النتيجة.

الحل

تنص النتيجة 3.2 على انه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الاكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 93 , 130فإن واحداعلى الاقل منها غير صحيح.

وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث = 260 فإن واحدا على الاقل من هذه القياسات غير صحيح



34) **اكتب:** فسّر كيف يمكنك إيجاد القياسات المجهولة في الشكل المجاور؟

الحل

∠ A = 70 لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110 متجاورتان على مستقيم

وبما أن M ∠ C = M ∠ B ومجموعهما يساوي 110

إذن M ∠ C = M ∠ B = 55

35) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من z ، y في الشكل المجاور.

$(5y+5)^\circ$

135° $(4z+9)^\circ$ $(9y-2)^\circ$

الحل

$$(4z+9)^\circ+(9y-2)^\circ=180^\circ$$
$$4z+9+9y-2=180^\circ$$
$$4z+9y=180^\circ-7$$
$$4z+9y=173\rightarrow 1$$

$$(5y+5)^\circ+(4z+9)^\circ=135^\circ$$
$$5y+5+4z+9=135^\circ$$
$$5y+4z=135^\circ-14$$
$$4z+5y=121\quad \times -1$$
$$-4z-5y=-121\rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y=52$$
$$y=13$$
$$4z+9y=173$$
$$4z+9\times 13=173$$
$$4z=56$$
$$z=14$$

36) **تبرير:** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle A$ حادة، فهل $\triangle ABC$ حادّ الزوايا أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم أنه لا يمكن تحديد نوعه؟ وضح إجابتك.

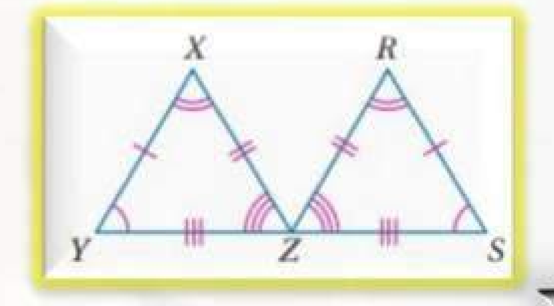


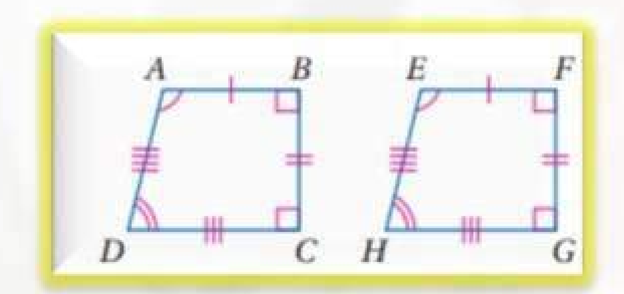
منفرج الزاوية، لان الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعيدتين أقل من 90 لذا فان الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتما .





في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق:





الحل

$\angle Y \cong \angle S$, $\angle X \cong \angle R$,
$\angle XZY \cong \angle RZS$
$YX \cong SR$, $YZ \cong SZ$, $XZ \cong RZ$
$\Delta YXZ \cong \Delta SRZ$

$\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$,
$\angle D \cong \angle H$
$AB \cong EF$, $CD \cong GH$, $AD \cong EH$,
$BC \cong FG$
$EFGH \cong ABCD$



٣-٣ المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:

درست الزوايا المتطابقة واستعمالاتها.

والآن:

- أُسمّي العناصر المتناظرة في المضلعات المتطابقة وأستعملها.
- أثبت تطابق مثلثين باستعمال تعريف التطابق

المفردات

التطابق
Congruent

المضلعات المتطابقة
Congruent Polygons

العناصر المتناظرة
Corresponding Parts

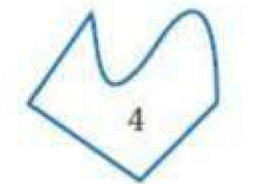
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تقوم عدّة مصانع بصنع مسجّلات سيارات بواجهات متحركة يصعب نزعها لحمايتها من السرقة، علمًا بأن شكل هذه الواجهات وأبعادها تطابق تمامًا شكل المكان الذي تثبت فيه وأبعاده؛ وذلك لتثبيتها في لوحة أجهزة السيارة بدقة.



التطابق والعناصر المتناظرة: إذا كان لشكلين هندسيين الشكل نفسه والقياسات نفسها فإنّهما **متطابقان**.

متطابقة	غير متطابقة
1 2 3	 
الأشكال 3 ,2 ,1 لها الشكل نفسه والقياسات نفسها على الرغم من أنها في أوضاع مختلفة.	الشكلان 5 ,4 لهما الشكل نفسه، لكنهما مختلفان في القياسات.



٣-٣ المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

في أي **مضلعين متطابقين** تتطابق **العناصر المتناظرة**. وتتضمن العناصر المتناظرة الزوايا والأضلاع.

مفهوم أساسي — تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

نموذج:

مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H \qquad \angle B \cong \angle J \qquad \angle C \cong \angle K$

الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ} \qquad \overline{BC} \cong \overline{JK} \qquad \overline{CA} \cong \overline{KH}$

عبارة التطابق

$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

هناك عباراتُ تطابقٍ أخرى للمثلثين أعلاه. وعبارات التطابق الصحيحة للمضلعات المتطابقة تظهر الرؤوس بالترتيب نفسه.

عبارة صحيحة

$\triangle BCA \cong \triangle JKH$

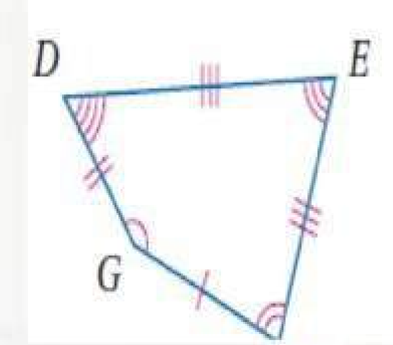
عبارة غير صحيحة

$\triangle ABC \cong \triangle HKJ$



مثال 1 تعرف العناصر المتناظرة المتطابقة

بيّن أنّ المضلعين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.

الزوايا: $\angle P \cong \angle G, \angle Q \cong \angle F,$

$\angle R \cong \angle E, \angle S \cong \angle D$

الأضلاع: $\overline{PQ} \cong \overline{GF}, \overline{QR} \cong \overline{FE},$

$\overline{RS} \cong \overline{ED}, \overline{SP} \cong \overline{DG}$

وبما أنّ جميع العناصر المتناظرة للمضلعين متطابقة، فإنّ المضلع $PQRS \cong$ المضلع $GFED$.



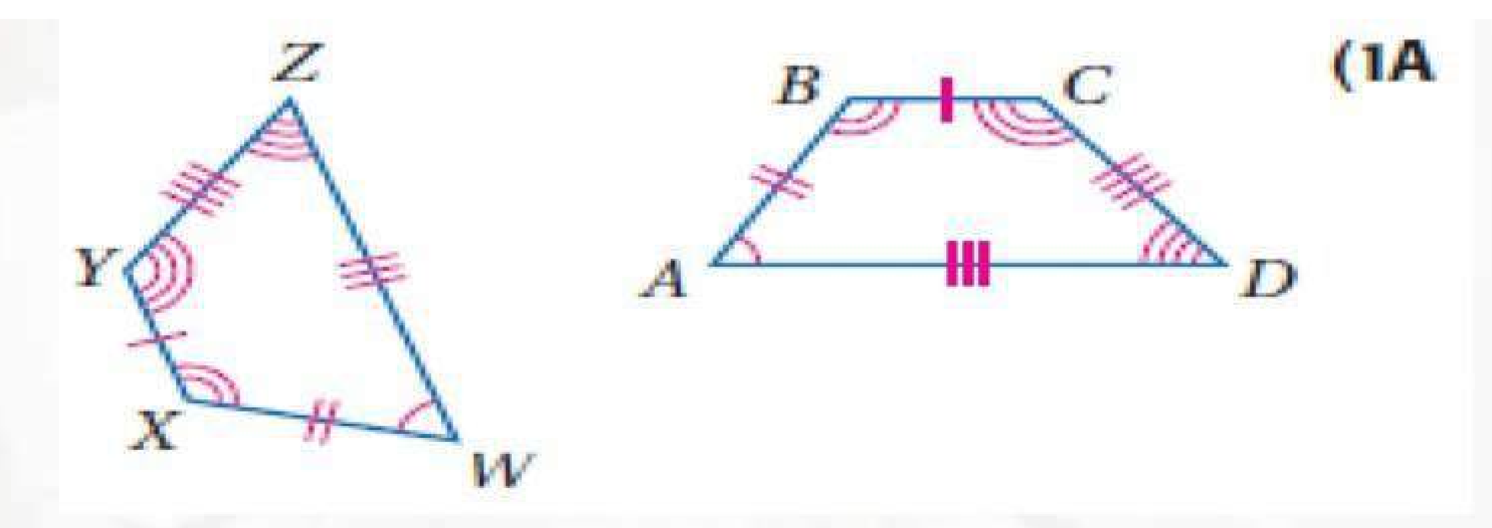


تاريخ الرياضيات

جوهان كارل فردريك جاوس (1777م – 1855م)
قدّم جاوس رمز التطابق ليبيّن أن طرفي المعادلة متساويان حتّى ولو كانا مختلفين شكلاً. وقد حقق إنجازات عديدة في الرياضيات والفيزياء تتضمن برهانًا للنظرية الأساسية في الجبر.



بيّن أنّ المضلعين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



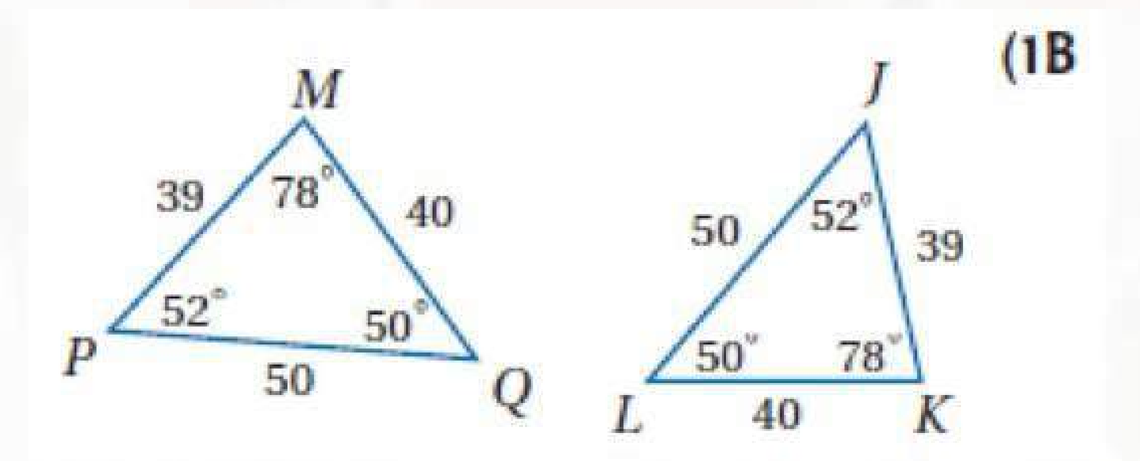
(1A $\angle A \cong \angle W, \angle B \cong \angle X, \angle C \cong \angle Y, \angle D \cong \angle Z,$

$\overline{AB} \cong \overline{WX}, \overline{BC} \cong \overline{XY}, \overline{CD} \cong \overline{YZ}, \overline{DA} \cong \overline{ZW},$

المضلع $ABCD \cong$ المضلع $WXYZ$



بيّن أنّ المضلعين المجاورين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثمّ اكتب عبارة التطابق.



(1B $\angle J \cong \angle P$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle L \cong \angle Q$,

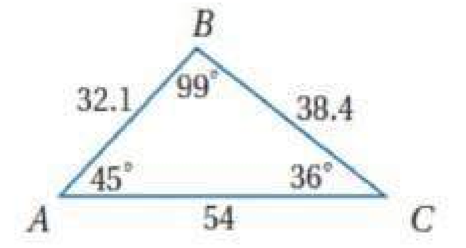
$\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{KL} \cong \overline{MQ}$, $\overline{LJ} \cong \overline{QP}$,

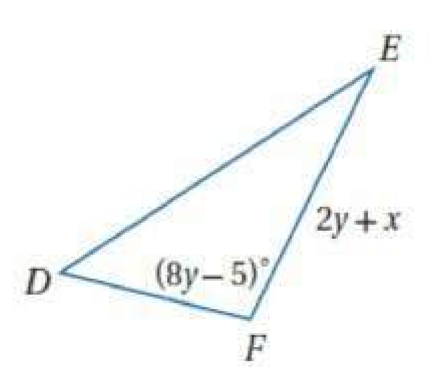
$\triangle JKL \cong \triangle PMQ$



مثال 2 تعيين العناصر المتناظرة المتطابقة

في الشكل المجاور إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ ، فأوجد قيمة كل من x, y .





$\angle F \cong \angle B$	العناصر المتناظرة متطابقة
$m\angle F = m\angle B$	تعريف التطابق
$8y - 5 = 99$	بالتعويض
$8y = 104$	بإضافة 5 إلى الطرفين
$y = 13$	بقسمة الطرفين على 8
$FE \cong BC$	العناصر المتناظرة متطابقة
$FE = BC$	تعريف التطابق
$2y + x = 38.4$	بالتعويض
$2(13) + x = 38.4$	بالتعويض
$26 + x = 38.4$	بالتبسيط
$x = 12.4$	بطرح 26 من الطرفين

إرشادات للدراسة

استعمال عبارة التطابق

يمكنك استعمال عبارة التطابق لمساعدتك على معرفة الأضلاع المتناظرة.

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$

$\overline{BC} \cong \overline{FE}$

2) في الشكل المجاور إذا كان $\triangle RSV \cong \triangle TVS$،
فأوجد قيمة كل من x, y.

$m(\angle R) = 180° - (90° + 78°)$

$m(\angle R) = 12°$

من تطابق المثلثين

$X = 12°$

$RS = VT$

$2y - 1 = 24$

$2y = 25$

$y = 12.5$

$x = 12, y = 12.5$



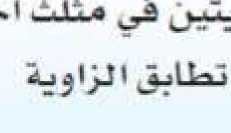
إثبات تطابق المثلثات إن نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث التي تعلمتها في الدرس 2–3 تقود إلى نظرية أخرى حول الزوايا في مثلثين.

نظرية 3.3 نظريّة الزاوية الثالثة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر، فإنّ الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الثاني.

مثال: إذا كانت $\angle C \cong \angle K, \angle B \cong \angle J$ ، فإنّ $\angle A \cong \angle L$.



مثال 3 من واقع الحياة استعمال نظرية الزاوية الثالثة

تنظيم الحفلات: قرّر منظمو حفلة مدرسيّة أن يطووا مناديل الطعام على صورة جيب مثلثي حتى يتمكنوا من وضع هدية بسيطة فيه. إذا كانت: $\angle NPQ \cong \angle RST, m\angle NPQ = 40°$ ، فأوجد $m\angle SRT$.

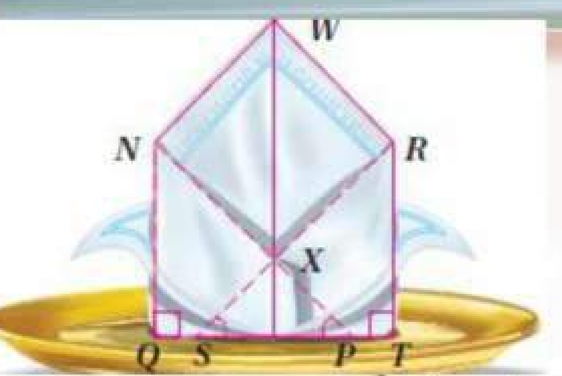
بما أنّ $\angle NPQ \cong \angle RST$ ، ولأن جميع الزوايا القائمة متطابقة $(\angle NQP \cong \angle RTS)$ ، فإنّ $\angle QNP \cong \angle SRT$ بحسب نظرية الزاوية الثالثة؛ إذن $m\angle QNP = m\angle SRT$.

$m\angle QNP + m\angle NPQ = 90°$	الزاويتان الحادّتان في المثلث القائم الزاوية متتامّتان
$m\angle QNP + 40° = 90°$	بالتعويض
$m\angle QNP = 50°$	بطرح 40° من الطرفين

وبالتعويض فإن $m\angle SRT = m\angle QNP = 50°$.

الربط مع الحياة

استعمال بعض المهارات الأساسية عند طي مناديل المائدة يُضفي لمسة من الجمال والأناقة لأي حفلة. وكثير من هذه الطيات تأخذ شكل المثلث.



3) في الشكل أعلاه إذا كانت $\angle WNX \cong \angle WRX$، وكان $\overline{WX}$ منصِّفاً لِـ $\angle NXR$، وكان $m\angle NXW = 49°$ ، $m\angle WNX = 88°$، فأوجد $m\angle NWR$. وفسِّر إجابتك.

3) $86°$؛ بما أن:

$\angle WNX \cong \angle WRX,$

$\angle NXW \cong \angle RXW,$ فإن

$\angle NWX \cong \angle RWX$

$m\angle NWX = 180° - 88° - 49°$

$= 43°$

فإن $m\angle NWR = 2 \times 43°$

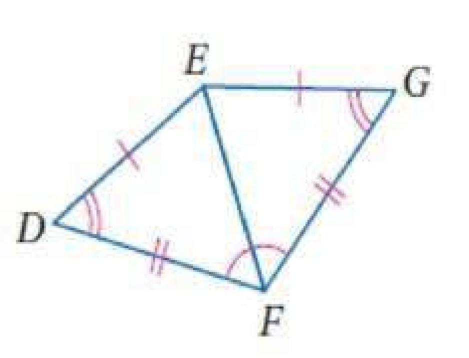
$= 86°$



خاصيَة الانعكاس

عندما يشترك مثلثان في ضلع، فاستعمل خاصيَة الانعكاس للتطابق؛ لتثبت أن الضلع المشترك يطابق نفسه.

مثال 4 إثبات تطابق مثلثين



اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{GE}, \overline{DF} \cong \overline{GF}, \angle D \cong \angle G$

$\angle DFE \cong \angle GFE$

المطلوب: $\triangle DEF \cong \triangle GEF$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{DE} \cong \overline{GE}, \overline{DF} \cong \overline{GF}$	1) معطيات
2) $\overline{EF} \cong \overline{EF}$	2) خاصية الانعكاس للتطابق
3) $\angle D \cong \angle G, \angle DFE \cong \angle GFE$	3) معطيات
4) $\angle DEF \cong \angle GEF$	4) نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle DEF \cong \triangle GEF$	5) تعريف المضلعات المتطابقة



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$

$\overline{JL} \cong \overline{PL}$ ، L تنصف $\overline{KM}$

المطلوب: $\triangle JLK \cong \triangle PLM$

البرهان:

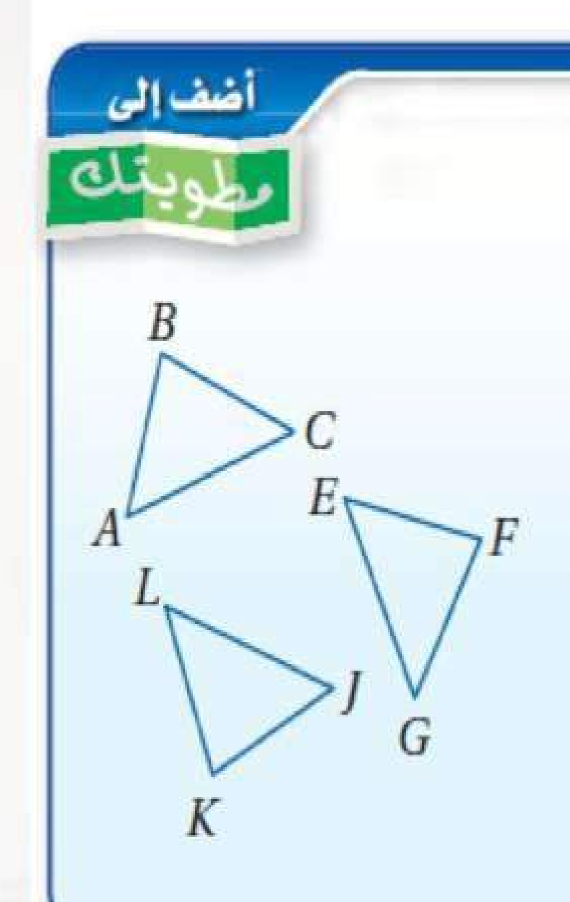
العبارات	المبررات
1) $\angle J \cong \angle P$, $\overline{JK} \cong \overline{PM}$, $\overline{JL} \cong \overline{PL}$ و L تنصف $\overline{KM}$	معطيات
2) $\angle JLK \cong \angle PLM$	الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة
3) $\overline{LK} \cong \overline{LM}$	تعريف منصف قطعة مستقيمة
4) $\angle K \cong \angle M$	نظرية الزاوية الثالثة
5) $\triangle JLK \cong \triangle PLM$	تعريف تطابق مضلعين



علاقة تطابق المثلثات علاقة انعكاس وتماثل وتعدٍّ كما في تطابق القطع المستقيمة والزوايا.

النظرية 3.4 خصائص تطابق المثلثات

أضف الى مطويتك



خاصيّة الانعكاس للتطابق

$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

خاصية التماثل للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ ، فإنَّ $\triangle EFG \cong \triangle ABC$.

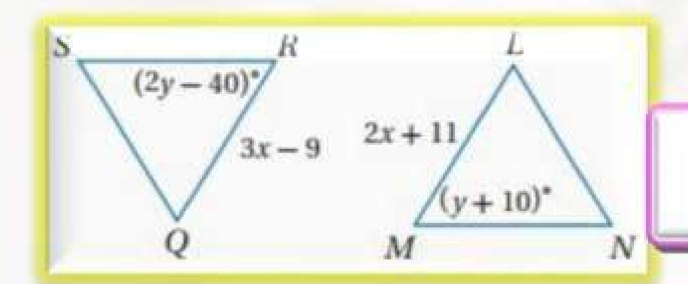
خاصيّة التعدّي للتطابق

إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG, \triangle EFG \cong \triangle JKL$ ، فإنَّ $\triangle ABC \cong \triangle JKL$.





في الشكلين المجاورين اذا كان، $\Delta LMN \cong \Delta QRS$ فاوجد:



3) قيمة x.

4) قيمة y.



3)

$\because \Delta LMN \cong \Delta QRS$

$\therefore \overline{LM} \cong \overline{QR}$

$2x + 11 = 3x - 9$

$-x = -9 - 11 = -20$

$x = 20$

4)

$\because \Delta LMN \cong \Delta QRS$

$\therefore \angle M = \angle R$

$(y + 10)^\circ = (2y - 40)^\circ$

$-y = -40 - 10$

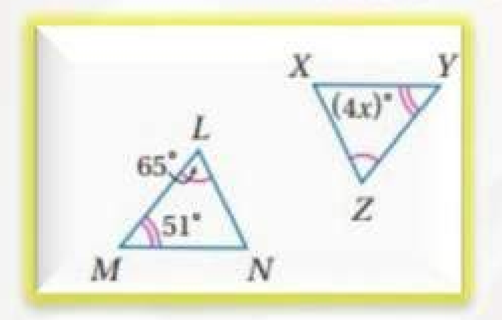
$-y = -50$

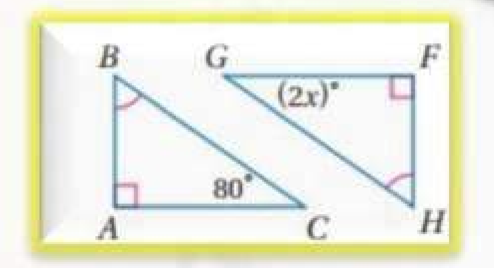
$y = 50$

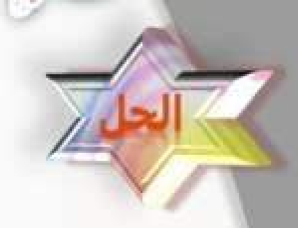




في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x، وفسر إجابتك :







بما أن كل من Δ BAC , Δ GFH يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما
إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهمامتطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$\angle G \cong \angle C$

$2X = 80$

$X = 40$

بما أن كل من Δ XYZ , Δ MLN يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$\angle X \cong \angle N$

$4X = \angle N$

$\angle N = 180 - (65 + 51)$

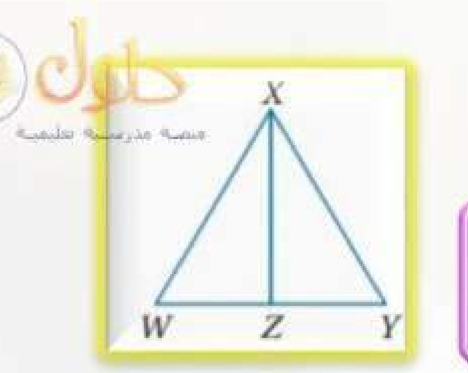
$\angle N = 64$

$4X = 64$

$X = 16$

المثال٤

٧) برهان: اكتب برهانا حرا.



المعطيات: $\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$

الحل

نعلم أن $WX \cong YX$, $WZ \cong YZ$, $XZ \cong XZ$

$\angle WXZ \cong \angle YXZ$, $\angle XZW \cong \angle XZY$

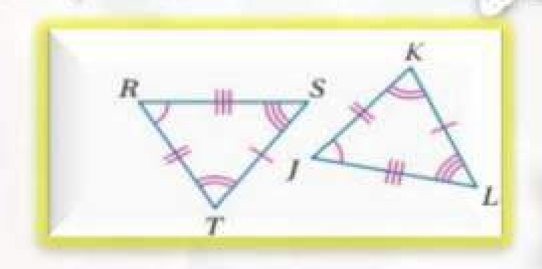
وحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون $\angle W = \angle Y$

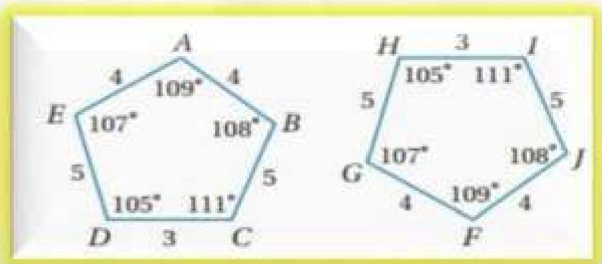
اذن $\Delta WXZ \cong \Delta YXZ$



المثال ١

في كل من المثالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة، ثم اكتب عبارة التطابق:





الحل

$\angle R \cong \angle J$, $\angle T \cong \angle K$, $\angle S \cong \angle L$

$RT \cong JK$, $TS \cong KL$, $RS \cong JL$

إذن $\Delta RTS \cong \Delta JKL$

$\angle A \cong \angle F$, $\angle B \cong \angle J$, $\angle C \cong \angle I$, $\angle D = \angle H$, $\angle E = \angle G$

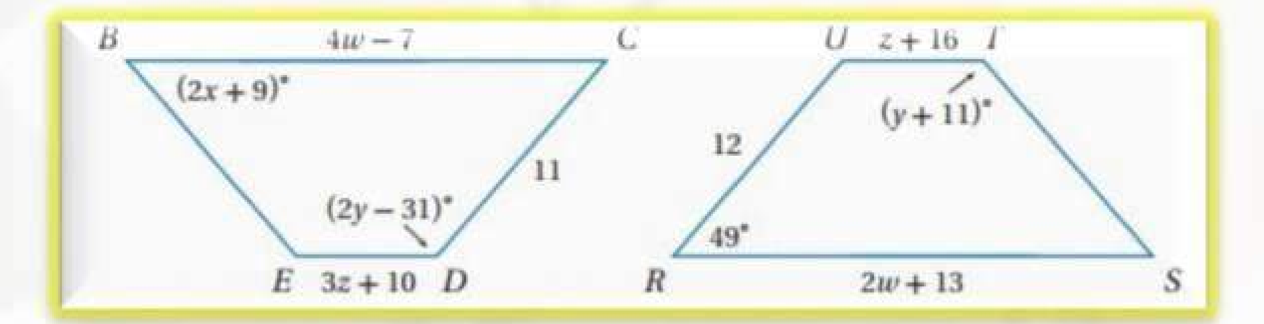
$AB \cong FJ$, $BC \cong JI$, $CD \cong IH$, $DE \cong HG$, $AE \cong FG$

إذن المضلع ABCDE = المضلع FJIHG





إذا كان المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$، فأوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:



الحل

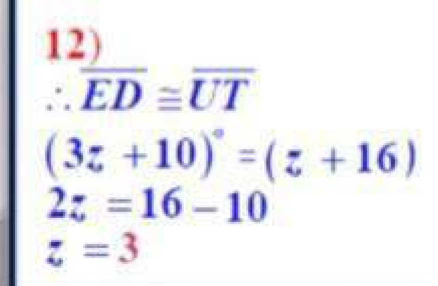
10) x

10)
$\therefore \angle R \cong \angle B$
$49^\circ = 2x + 9$
$49 - 9 = 2x$
$x = 20$

11) y

11)
$\therefore \angle D \cong \angle T$
$(2y - 31)^\circ = (y + 11)^\circ$
$y = 11 + 31$
$y = 42$

12) z

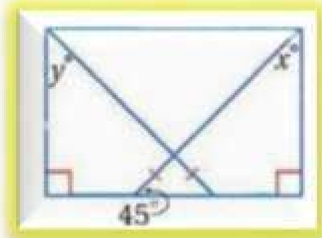


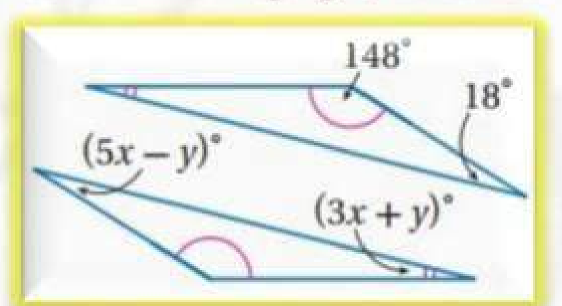
13) w

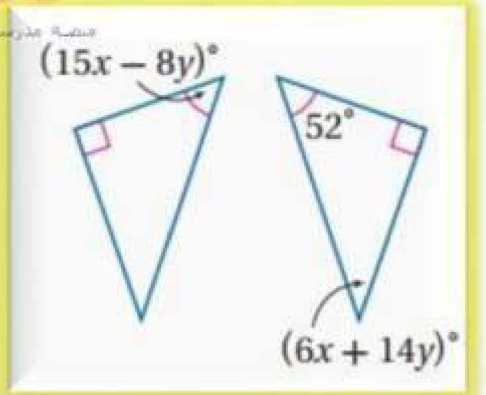
13)
$\therefore \overline{BC} \cong \overline{RS}$
$(4w - 7)^\circ = (2w + 13)^\circ$
$2w = 13 + 7$
$2w = 20$
$10 = w$



أوجد قيمة كل من x , y في الاسئلة الآتية :







الحل

$45 = Y$

$45 = X$

لأن المثلث المتطابق الضلعين زواياه القاعدة له متساوية وكل منها =45

$(3X + Y) = 180 - (18 + 148)$

$3X + Y = 14 \rightarrow 1$

$5X - Y = 18 \rightarrow 2$

$8X = 32$

$X = 4$

$5 \times 4 - Y = 18$

$Y = 20 - 18$

$Y = 2$

$(15X - 8Y) = 52$

$(6X + 14Y) = 180 - (52 + 90)$

$6X + 14Y = 38 \rightarrow \times 2$

$3X + 7Y = 19 \rightarrow \times(-5)$

$-15X - 35Y = -95 \rightarrow 1$

$15X - 8Y = 52 \rightarrow 2$

$0 - 43Y = -43$

$Y = 1$

$15X - 8 \times 1 = 52$

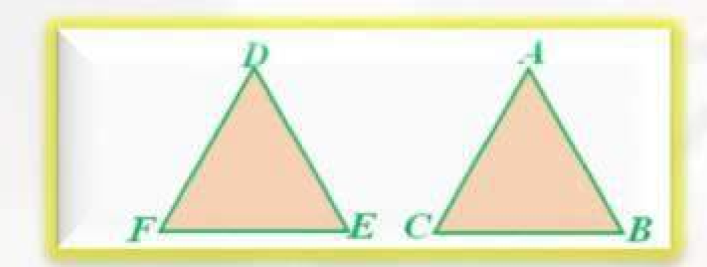
$15X = 60$

$X = 4$





17) **برهان،** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 3.3.





1) $\angle E \cong \angle B , \angle D \cong \angle A$ (معطيات)

2) $M\angle E = M\angle B , M\angle D = M\angle A$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

3) $M\angle A + M\angle B + M\angle C = 180 , M\angle D + M\angle E + M\angle F = 180$
(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

4) $M\angle A + M\angle B + M\angle C = M\angle D + M\angle E + M\angle F$
(خاصية التعدي)

5) $M\angle D + M\angle E + M\angle C = M\angle D + M\angle E + M\angle F$ (خاصية التعويض)

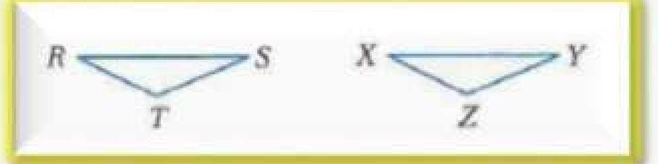
6) $M\angle C = M\angle F$ (خاصية الطرح للمساواة)

7) $\angle C \cong \angle F$ (الزوايا تعريف تطابق)



18) برهان: رتِّب العبارات المستعملة في برهان العبارة الآتية ترتيبًا صحيحًا. وقدِّم تبريرًا لكل عبارة.

"تطابق المثلثات علاقة تماثل". (النظرية 3.4)



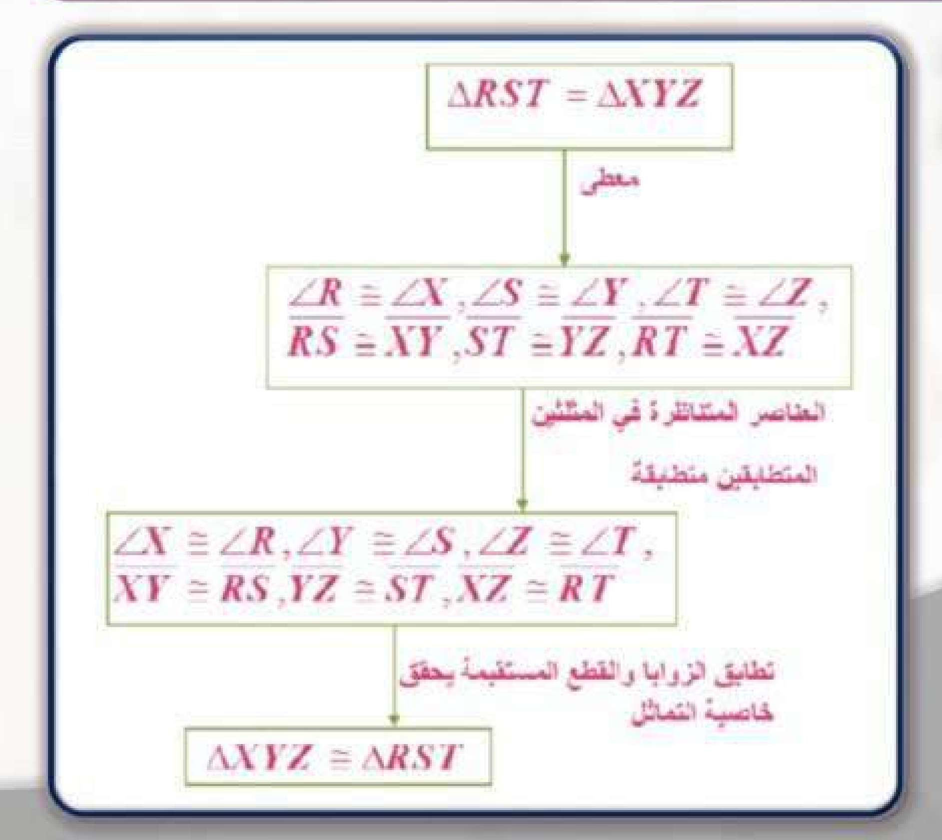
المعطيات: $\triangle RST \cong \triangle XYZ$

المطلوب: $\triangle XYZ \cong \triangle RST$

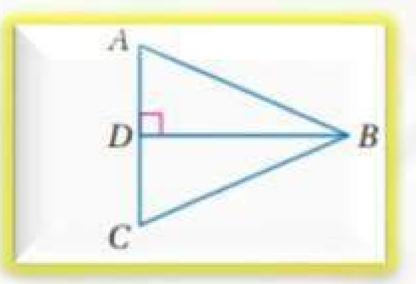
البرهان:

$\angle X \cong \angle R, \angle Y \cong \angle S, \angle Z \cong \angle T, \overline{XY} \cong \overline{RS}, \overline{YZ} \cong \overline{ST}, \overline{XZ} \cong \overline{RT}$	$\angle R \cong \angle X, \angle S \cong \angle Y, \angle T \cong \angle Z, \overline{RS} \cong \overline{XY}, \overline{ST} \cong \overline{YZ}, \overline{RT} \cong \overline{XZ}$	$\triangle RST \cong \triangle XYZ$	$\triangle XYZ \cong \triangle RST$
?	?	?	?









19) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين:

المعطيات: $\overline{BD}$ تنصّف $\angle B$.
$\overline{BD} \perp \overline{AC}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle C$



1) $\overline{BD}$ تنصف $\angle B$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. (معطيات)

2) $\angle ABD \cong \angle DBC$ (تعريف منصف الزوايا)

3) $\angle ADB$ ، $\angle BDC$ قائمتان (المستقيمان المتعامدان يكونان زاوية قائمة)

4) $\angle ADB \cong \angle BDC$ (الزوايا القائمة متطابقة)

5) $\angle A \cong \angle C$ نظرية الزاوية الثالثة



برهان: اكتب برهانًا من النوع المذكور لكل جزء من النظرية 3.4.

20) تطابق المثلثات علاقة تعدٍّ. (برهان حرّ)

الحل



نعلم أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

فإن: $\angle A \cong \angle D , \angle B \cong \angle E , \angle C \cong \angle F$ ،

$AB \cong DE , BC \cong EF , AC \cong DF$.

نعلم أن $\Delta DEF \cong \Delta GHI$ ولذا فإن:

$DE \cong GH , EF \cong HI , DF \cong GI$ ، $\angle D \cong \angle G , \angle E \cong \angle H ,$
$\angle F \cong \angle I$

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعليه فإن

$\angle A \cong \angle G , \angle B \cong \angle H , \angle C \cong \angle I$

$AB \cong GH , BC \cong HI , AC \cong GI$ ،

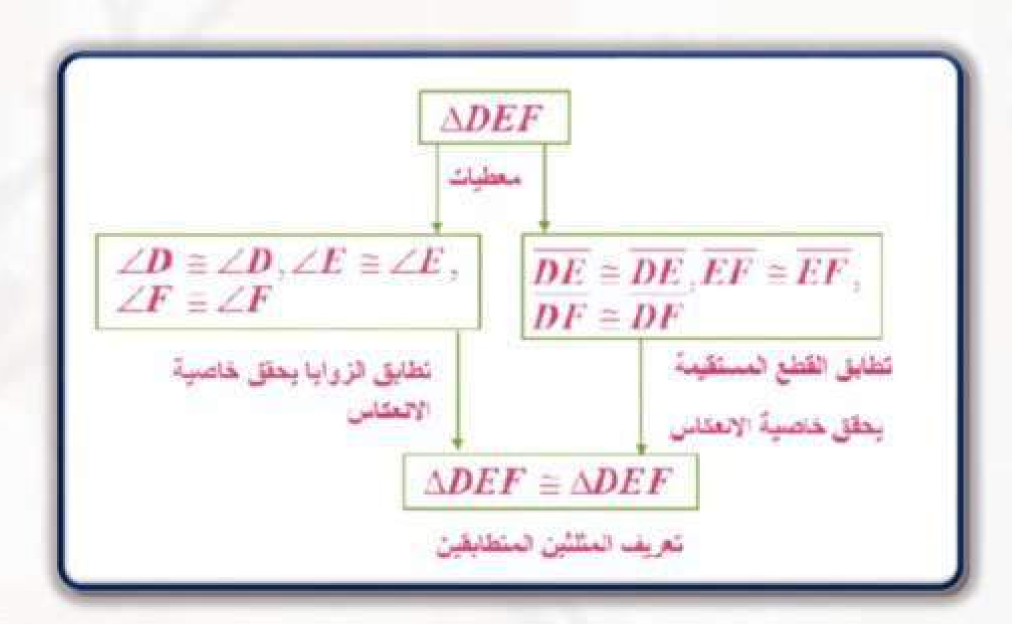
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي وبهذا يكون

$\Delta ABC \cong \Delta GHI$ من تعريف المثلثين المتطابقين.



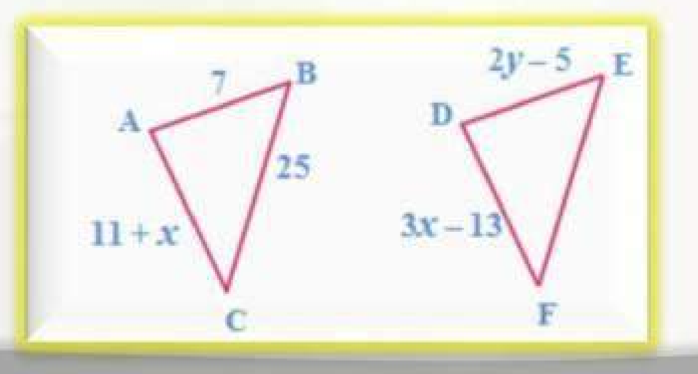
21) تطابق المثلثات علاقة انعكاس. (برهان تسلسلي)

الحل





22) $\triangle ABC \cong \triangle DEF, AB = 7, BC = 25, AC = 11 + x, DF = 3x - 13, DE = 2y - 5$



$\because \Delta ABC \cong \Delta DEF$

$\therefore DE = AB$

$2Y - 5 = 7$

$2Y = 12$

$Y = 6$

$DF = AC$

$3X - 13 = X + 11$

$2X = 11 + 13$

$2X = 24$

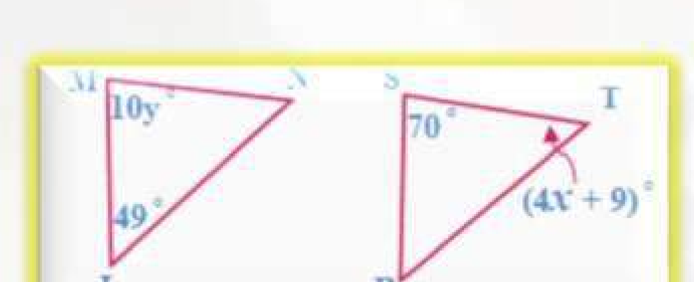
$X = 12$





$\triangle LMN \cong \triangle RST$, $m\angle L = 49°$, $m\angle M = (10y)°$, $m\angle S = 70°$, $m\angle T = (4x + 9)°$ (23

الحل

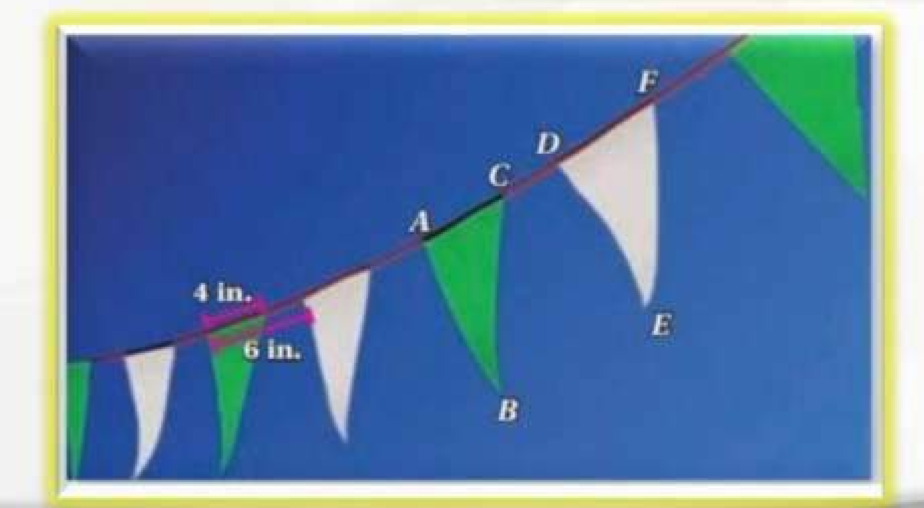


$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\angle M = \angle M$
$10y = 70$
$y = 7$

$\angle N = 180° - (49° + 70°)$
$\angle N = 61°$
$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\therefore \angle T = \angle N$
$4x + 9 = 61$
$4x = 52$
$x = 13$

24) **رايات،** في مهرجان رياضي، كان سعيد مسؤولًا عن إحاطة منطقة مساحتها $100\ ft^2$ مخصصة لجلوس المُعلقين والإعلاميين، فاستعمل حبلًا وثبّت عليه رايات على شكل مثلثات متطابقة، كلٌّ منها متطابق الضلعين.

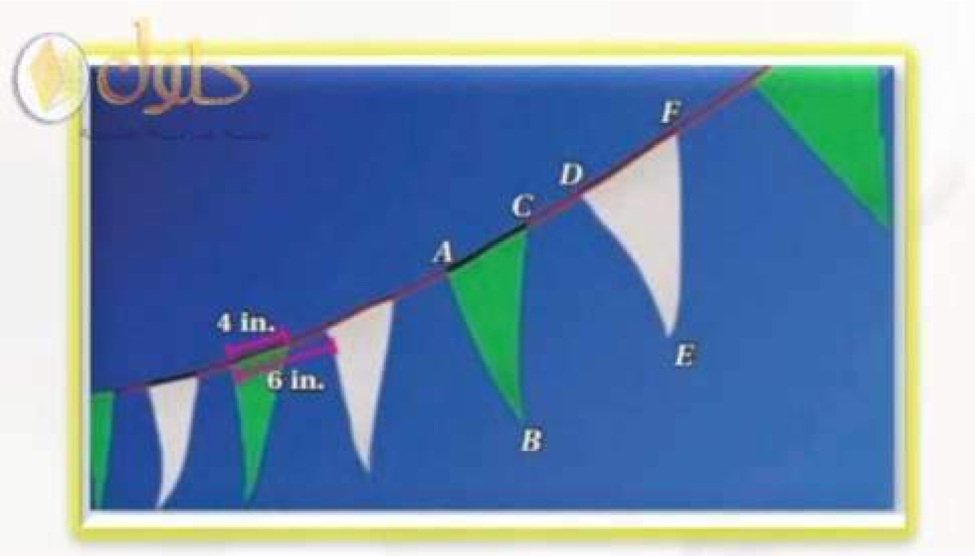
إرشاد: $1\ ft = 12\ in$



a) اكتب سبعة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة في الصورة.

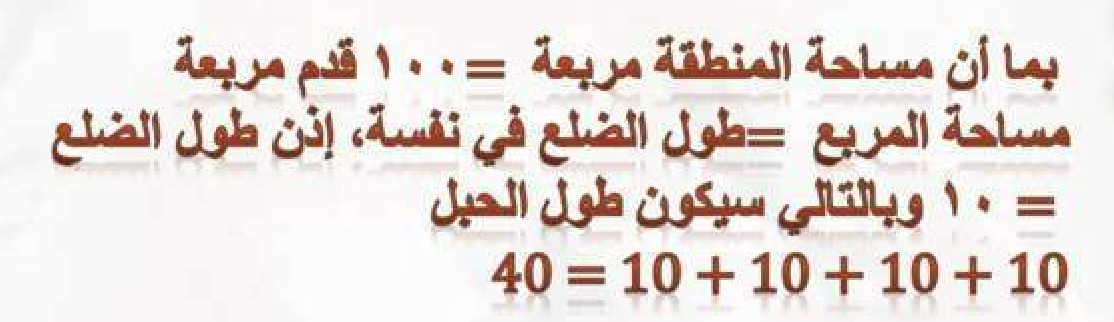
الحل





b) إذا كانت المنطقة التي حوّطها سعيد بحبل الرايات مربّعة الشكل، فكم سيكون طول الحبل؟

الحل



c) ما عدد الرايات المثبتة بالحبل؟

يوجد 2راية كل قدم من الحبل إذن

راية $40 \times 2 = 80$





25) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستكتشف العلاقة بين مساحات المضلعات المتطابقة:



a) لفظيًا: اكتب عبارة شرطيّة تمثل العلاقة بين مساحتَي مثلثين متطابقين.

إذا تطابق مثلثان فان مساحتيهما متساويتان.

b) لفظيًا: اكتب عكس عبارتك الشرطيّة. وهل العبارة العكسيّة صحيحة أم خطأ؟ وضّح تبريرك.

العبارة الشرطية :إذا تساوت مساحتا مثلثين فان المثلثين متطابقان .خطأ، فإذا كانت قاعدة المثلث 2 وارتفاعه 6وكانت قاعدة مثلث آخر 3وارتفاعه 4 فان مساحتيهما متساويتان ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.

c) هندسيًا: ارسم - إنْ أمكن - مستطيلين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.



d) هندسيًا: ارسم - إنْ أمكن - مربعين لهما المساحة نفسها، ولكنّهما غير متطابقين، وإذا كان ذلك غير ممكن فوضح السبب.

لا يمكن، لان المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لاضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين



26) أنماط: صَمِّم النمط المجاور باستعمال مضلعات منتظمة.

الحل

a) ما المضلعان المنتظمان اللذان استُعملا في التصميم؟

المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الاضلاع

b) سمِّ زوجًا من المثلثات المتطابقة.

$\Delta ABC \cong \Delta DEC$

c) سمِّ زوجًا من الزوايا المتطابقة.

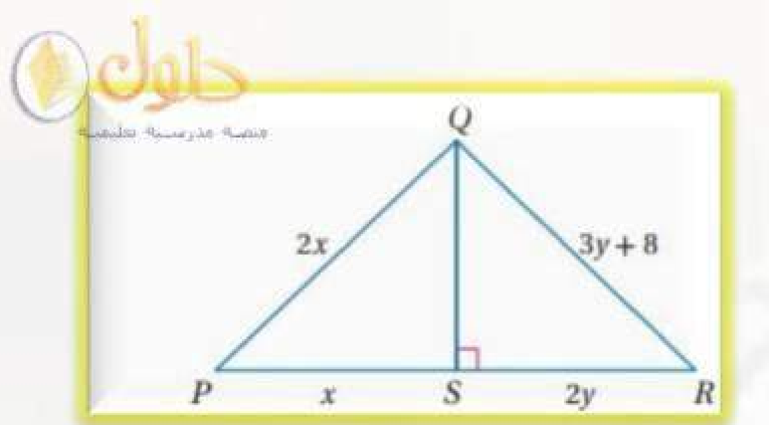
$\angle B = \angle E$

d) إذا كان $CB = 2$ in ، فكم يكون AE؟ وضح إجابتك.

AE = 4IN ،لأن المضلعات التي صمم منها النمط منتظمة فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة وهذا يعني أن طول CB يساوي طول كل من CE , AC لذا فان AE =AC + CE= 2 + 2 = 4

e) ما قياس $\angle EDC$؟ وضح إجابتك.

$\angle D = 60$ ، لأن جميع مثلثات النمط منتظمة فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وتكون كل زاوية في أي مثلث مساوية لـ 60





27) تحدٍّ: إذا كان $\Delta PQS \cong \Delta RQS$ ، فأوجد قيمة كلٍّ من x, y.



$$\Delta RQS \cong \Delta PQS$$
$$RS = PS$$
$$2y = x$$
$$RQ = PQ$$
$$3y + 8 = 2x$$

$$\because x = 2y$$
$$3y + 8 = 2 \times (2y)$$
$$3y - 4y = -8$$
$$-y = -8$$
$$y = 8$$
$$x = 2 \times 8$$
$$x = 16$$

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ.

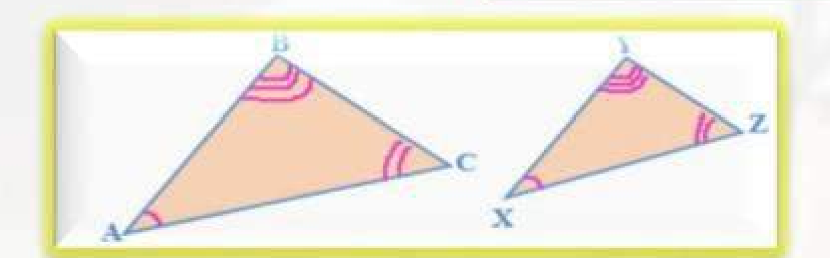
28) إذا تطابق زوجان من الزوايا المتناظرة لمثلثين، وتطابقت الأزواج الثلاثة من أضلاعهما المتناظرة، فإنَّ المثلثين متطابقان.



صحيحة، باستعمال نظرية الزاوية الثالثة، يكون الزوج الثالث من الزوايا متطابقتان أيضا وجميع ألضالع المناظرة متطابقة، والن العناصر المتناظرة متطابقة فان المثلثين متطابقان.



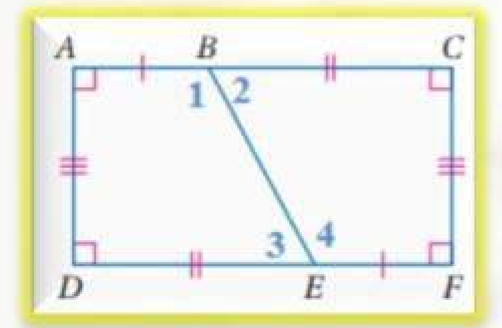
29) إذا كانت أزواج الزوايا المتناظرة الثلاثة لمثلثين متطابقة، فإنّ المثلثين متطابقان.







لكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة.



30) تحدٍّ: اكتب برهانًا حرًا لإثبات أن المضلع $ABED \cong$ المضلع $FEBC$.

AB = EF , ED = BC , AD = FC

الزوايا المتبادلة داخليا متطابقة فإن

$\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$

المضلع ABED = المضلعFEBC

31) اكتب: حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحةً دائمًا أو صحيحةً أحيانًا أو ليست صحيحةً أبدًا، ووضح إجابتك.

"المثلثان المتطابقا الأضلاع يكونان متطابقين"

صحيحة أحيانا، يكون المثلثات المتطابقا الأضلاع متطابقين إذا تطابق زوج من الأضلاع المتناظرة فيها